

Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus 5. Übungsblatt

Aufgabe 13.

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen G mit $|G| = 109$.

Hinweis. Ist 109 eine Primzahl?

Aufgabe 14.

Es sei (G, \cdot) eine Gruppe, so dass $g^2 = e$ für jedes $g \in G$ gilt. Dann ist G abelsch.

Aufgabe 15.

Es sei $G := \text{SL}(2, \mathbb{R})$ und $H := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda\mu = 1 \right\}$.

(a) Bestimmen Sie den Normalisator $N_{\text{SL}}(H)$ und berechnen Sie $N_{\text{SL}}(H)/H$.

(b) Gibt es einen Homomorphismus $\gamma : N_{\text{SL}}(H)/H \rightarrow N_{\text{SL}}(H)$, so dass $\beta \circ \gamma = \text{Id}_{N/H}$? Hierbei ist β die Projektionsabbildung $\beta : N_{\text{SL}}(H) \rightarrow N_{\text{SL}}(H)/H, x \mapsto xH$.

Aufgabe 16.

Es sei $\mathbb{F} := \mathbb{F}_3 := (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ der Körper mit den 3 Elementen $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}$ und \mathbb{F}^3 der 3-dimensionale \mathbb{F} -Vektorraum aller 3-Tupel.

(a) Bestimmen Sie alle Bahnen der Operation

$$\cdot : \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3, \quad (\sigma, (x_1, x_2, x_3)) \longmapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

(b) Wählen Sie aus jeder Bahn jeweils einen Punkt P und berechnen Sie die Isotropieuntergruppe $(\mathfrak{S}_3)_P$.

(c) Geben Sie die Anzahl der verschiedenen \mathfrak{S}_3 -Bahnen in \mathbb{F}^3 an.

Aufgabe 17.

Es sei Q das Quadrat in \mathbb{R}^2 mit den Ecken $(\pm 1, \pm 1)^T$ und $\mathcal{D}_4 \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ die Diedergruppe, welche das Quadrat invariant läßt. Zeichnen Sie die Bahnen von \mathcal{D}_4 durch die Punkte

(a) $P_1 := (0, 0)$

(b) $P_2 := (0, 2)$

(c) $P_3 := (2, 2)$

(d) $P_4 := (1, 2)$

und bestimmen Sie die Ordnung der entsprechenden Isotropiegruppen. Gibt es eine Bahn $\mathcal{D}_4(Q)$, so dass $|\mathcal{D}_4(Q)|$ mit keiner der Zahlen $|\mathcal{D}_4(P_j)|, j = 1, \dots, 4$ übereinstimmt?

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 17.05.2011.