

## Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus 5. Übungsblatt

### Aufgabe 13.

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen  $G$  mit  $|G| = 109$ .

*Hinweis.* Ist 109 eine Primzahl?

### Aufgabe 14.

Es sei  $(G, \cdot)$  eine Gruppe, so dass  $g^2 = e$  für jedes  $g \in G$  gilt. Dann ist  $G$  abelsch.

### Aufgabe 15.

Es sei  $G := \text{SL}(2, \mathbb{R})$  und  $H := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda\mu = 1 \right\}$ .

(a) Bestimmen Sie den Normalisator  $N_{\text{SL}}(H)$  und berechnen Sie  $N_{\text{SL}}(H)/H$ .

(b) Gibt es einen Homomorphismus  $\gamma : N_{\text{SL}}(H)/H \rightarrow N_{\text{SL}}(H)$ , so dass  $\beta \circ \gamma = \text{Id}_{N/H}$ ? Hierbei ist  $\beta$  die Projektionsabbildung  $\beta : N_{\text{SL}}(H) \rightarrow N_{\text{SL}}(H)/H, x \mapsto xH$ .

### Aufgabe 16.

Es sei  $\mathbb{F} := \mathbb{F}_3 := (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$  der Körper mit den 3 Elementen  $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}$  und  $\mathbb{F}^3$  der 3-dimensionale  $\mathbb{F}$ -Vektorraum aller 3-Tupel.

(a) Bestimmen Sie alle Bahnen der Operation

$$\cdot : \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{F}^3 \longrightarrow \mathbb{F}^3, \quad (\sigma, (x_1, x_2, x_3)) \longmapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

(b) Wählen Sie aus jeder Bahn jeweils einen Punkt  $P$  und berechnen Sie die Isotropieuntergruppe  $(\mathfrak{S}_3)_P$ .

(c) Geben Sie die Anzahl der verschiedenen  $\mathfrak{S}_3$ -Bahnen in  $\mathbb{F}^3$  an.

### Aufgabe 17.

Es sei  $Q$  das Quadrat in  $\mathbb{R}^2$  mit den Ecken  $(\pm 1, \pm 1)^T$  und  $\mathcal{D}_4 \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$  die Diedergruppe, welche das Quadrat invariant läßt. Zeichnen Sie die Bahnen von  $\mathcal{D}_4$  durch die Punkte

(a)  $P_1 := (0, 0)$

(b)  $P_2 := (0, 2)$

(c)  $P_3 := (2, 2)$

(d)  $P_4 := (1, 2)$

und bestimmen Sie die Ordnung der entsprechenden Isotropiegruppen. Gibt es eine Bahn  $\mathcal{D}_4(Q)$ , so dass  $|\mathcal{D}_4(Q)|$  mit keiner der Zahlen  $|\mathcal{D}_4(P_j)|, j = 1, \dots, 4$  übereinstimmt?

*Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 17.05.2011.*