Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

6. Übungsblatt

Aufgabe 18.
Bestimmen sie die Isometriegruppen $\mathbf{B}_M$ der nachfolgenden konvexen Mengen, die die konvexen Hüllen $M = \text{conv}(\mathcal{E})$ der folgenden endlichen Mengen sind:

(a) $\mathcal{E}_1 = \{(1,2)^T, (-1,2)^T, (2,0)^T, (-2,0)^T, (0,-3)^T\}$

(b) $\mathcal{E}_2 = \{(0,0)^T, (-\sqrt{2},0)^T, (1-\sqrt{2},1)^T, (1,1)^T\}$

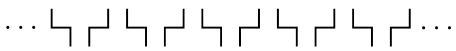
Aufgabe 19.
Entscheiden Sie, welche der folgenden Operationen eigentlich diskontinuierlich sind und skizzieren Sie die typischen Bahnen:

(a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (n,x) \mapsto e^n \cdot x$

(b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (n,(x_1,x_2)^T) \mapsto (x_1 + nx_2, x_2)$

(c) $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad ((n,m),(x_1,x_2) = (x_1 + n + 2m, x_2 + 2n + 3m)$

Aufgabe 20.
Es sei $\Delta := \{m + n\sqrt{2} : m,n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass Δ eine Untergruppe von $(\mathbb{R},+)$ ist, die jedoch nicht diskret ist. Zeigen Sie, dass in jedem Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unendlich viele Elemente von Δ liegen.

Aufgabe 21.
Es sei $G \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ die Isometriegruppe des Frieses 
und pr : $\mathbf{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{O}(2)$, $\psi \mapsto T_{-\psi(0)} \circ \psi$ der Projektionshomomorphismus auf die Gruppe der Punktisometrien O_0.

(a) Bestimmen Sie die Punktgruppe $\overline{G} = \text{pr}(G)$ von G.

(b) Für jedes Element $\overline{g} \in \overline{G}$ und jedes $g \in G$ mit $\text{pr}(g) = \overline{g}$ beschreiben Sie die Operation von g geometrisch.

(c) Es sei $H < G$ die Untergruppe aller Translationen aus G. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in G/H.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 24.05.2011.