

Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus 7. Übungsblatt

Aufgabe 22.

Zeigen Sie: Enthält eine Untergruppe $G \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ zwei Drehungen $D_\phi(P)$, $D_\theta(Q)$ um zwei verschiedene Punkte P, Q , so enthält G auch nichttriviale Translationen.

Aufgabe 22.

Es sei $G \subset \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ eine diskrete Untergruppe mit $\mathbf{T}_G = \mathbb{Z}v$, $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und $\text{pr} : \mathbf{B}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbf{B}(\mathbb{R}^2)$ die Abbildung $\psi \mapsto T_{-\psi(0)} \circ \psi$.

- Zeigen Sie, dass ψ ein Gruppenhomomorphismus mit $\text{pr} \circ \text{pr} = \text{id}$ ist. Ferner gilt $\text{pr}(\mathbf{B}(\mathbb{R}^2)) = \mathbf{O}(2)$.
- Gibt es in $\overline{G} = \text{pr}(G)$ eine Drehung D_π , so enthält G eine Drehung $D_\pi(P)$ um den gleichen Winkel mit Rotationsmittelpunkt $P \in \mathbb{R}^2$.
- Gibt es in $\overline{G} = \text{pr}(G)$ eine Spiegelung $S_{\mathbb{R}v}$, so enthält G entweder eine Spiegelung an einer zu $\mathbb{R}v$ parallelen Gerade oder eine Gleitspiegelung $T_u \circ S_{\mathbb{R}v}$. Was sind die möglichen Werte für u ?

Aufgabe 24.

Es sei (G, \bullet) eine Gruppe, in der $g^2 = e$ für jedes $g \in G$ gilt, so gibt es einen Gruppenisomorphismus $G \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^k$. Insbesondere ist die Ordnung von jeder solchen Gruppe G eine Potenz von 2.
Hinweis. Versuchen Sie auf G eine geeignete Vektorraumstruktur zu konstruieren.

Aufgabe 25.

Konstruieren Sie aus hinreichend stabilem Papier

- ein Tetraeder,
- einen Würfel,
- ein Dodekaeder und/oder ein Ikosaeder

und bringen Sie sie zu den nächsten Vorlesungen und Übungen mit.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 7.06.2011, Aufgabe 25 möglichst bald.