Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

8. Übungsblatt

Aufgabe 26.
Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Es bezeichne $\cdot : G \times X \to X$ diese Operation. Für ein $g \in G$ sei $\text{Fix}(g) = \{x \in X : g \cdot x = x\}$ die Menge der Fixpunkte von $g : X \to X$ und G_x die Isotropieuntergruppe eines Punktes $x \in X$.

(a) Beweisen Sie die Formel
$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| \;=\; \sum_{x \in X} |G_x| \;.$$

(b) Beweisen Sie die Formel von Burnside:
$$|G| \cdot (\text{Anzahl der } G\text{-Bahnen}) \;=\; \sum_{x \in X} |G_x| \;.$$

Aufgabe 27.
Es gibt $70 = \binom{8}{4}$ Möglichkeiten, von den Ecken eines regulären 8-Ecks 4 weiß und 4 schwarz zu färben. Man bezeichne zwei solche Färbungen als äquivalent, wenn sie ineinander durch eine Isometrie dieses 8-Ecks, also ein Element der Diedergrupp $\mathcal{D}_8$ überführt werden können.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl von nicht äquivalenten Färbungen dieses 8-Ecks.

(b) Geben Sie aus jeder Äquivalenzklasse eine Färbung der Ecken an.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel von Burnside.

Aufgabe 28.
Es sei
$$\mathcal{E} := \left\{ \left(\pm 1, \pm\frac{1+\sqrt{5}}{2},\, 0 \right) \quad , \quad \left(\pm\, \frac{1+\sqrt{5}}{2},\; 0,\; \pm 1 \right) \quad , \quad \left(0\,, \pm 1,\; \pm\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$
eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{P}$ das von dieser Menge erzeugte konvexe Polytop.

(a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $\mathcal{E}$.

(b) Welche Werte nehmen die Abstände von je zwei Punkten aus $\mathcal{E}$ an? Um was für einen Körper handelt es sich beim $\mathcal{P}$?

(c) Betrachten Sie die Gruppe $D_{\mathcal{E}}$ aller Drehungen aus $\text{SO}(3)$, die die Menge $\mathcal{E}$ invariant lassen. Geben Sie an welche Ordnungen die Elemente aus $D_{\mathcal{E}}$ haben können.

Aufgabe 29.
Es sei $\mathcal{O}$ die Isometriegruppe aller Drehungen des Würfels und $\mathcal{O}_h \subset \text{O}(3)$ die volle Isometriegruppe des Würfels. Ferner bezeichne $\mathcal{T}_d$ die volle Isometriegruppe $\mathbf{B}_{\text{Tetraeder}}$ eines Tetraeders.

(a) Geben Sie explizit einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{O}$ und der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_h$ isomorph zu $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ist.

(c) Zu welcher der Gruppen, $\mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$, ist die Isometriegruppe $\mathcal{T}_d$ isomorph?

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 14.06.2011.