Dr. habil. G. Fels
KIT SS 2011

Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

11. Übungsblatt

Aufgabe 37.
Es sei R ein kommutativer Ring und $I \lhd R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass I genau dann maximal ist, wenn R/I ein Körper ist.

Aufgabe 38.

(a) Bestimmen Sie in dem Ring $R = \mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen alle maximalen Ideale.

(b) Ist jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}[i]$ in dem Ring der Gaußschen Zahlen auch ein Primelement in $\mathbb{Z}[i]$?

Aufgabe 39.

(a) Betrachten Sie den Unterring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i\sqrt{5} \subset \mathbb{C}$. Geben Sie in R irreduzible Elemente $r \in R$ an, die nicht prim sind.

(b) Zerlegen Sie 30 in dem Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen in Primfaktoren.

Aufgabe 40.
Es seien $w_0, w_1, \dots, w_n$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen und $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in 1, 2, \dots, n$ es genau ein Polynom $P_k \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad $\leq k$ gibt, so dass

$$P_k(w_j) = z_j \qquad \text{für } j = 0, 1, \dots, k \text{ gilt}$$

und geben Sie eine allgemeine Formel, die die Gestalt eines solchen Polynomes P_k in Abhängigkeit von den w_j-s und z_j-s ausdrückt.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 5.07.2011.