Dr. habil. G. Fels
KIT SS 2011

Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus

12. Übungsblatt

Aufgabe 41.

(a) Es sei (R, ν) ein Euklidischer Ring und $r = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_\ell$ zwei Zerlegungen eines Elements $r \in R$, wobei alle p_j, q_j irreduzible Elemente aus R sind. Zeigen Sie, dass dann $k = \ell$ gelten muss, und dass nach einer geeigneten Umnummerierung von $q_1, \ldots, q_k$ die Faktoren p_j und q_j für alle $j = 1, \ldots k$ assoziiert sind.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Ringes S sowie eines Elements $s \in S$, das verschiedene Zerlegungen in irreduzible Elemente besitzt (d.h., die Zerlegungen erfüllen nicht die Bedingung aus (a)).

(c) Es sei T ein beliebiger Integritätsbereich, $t \in T$ und $t = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_\ell$ zwei Zerlegungen, so dass alle p_j, q_j Primelemente aus T sind. Gilt dann die gleiche Eindeutigkeitsaussage wie in (a)?

Aufgabe 42.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist.

(b) Es sei $\mathbb{F}_2 = (\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen sie in dem Polynomring $\mathbb{F}_2[X]$ alle irreduzible Polynome vom Grad ≤ 5.

(c) Entscheiden Sie, ob das Polynom $P := 3X^5 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 9$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $a := \sqrt{2} + \sqrt{7} \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Welchen Grad $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) : \mathbb{Q}]$ hat die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$?

Aufgabe 44. Es sei z eine komplexe Nullstelle des (irreduziblen) Polynomes $X^3 + 3X + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. Geben Sie das Inverse der Elemente $z^2 + z + 1$ sowie $z^2 + 3$ in dem Zahlkörper $\mathbb{Q}(z) \subset \mathbb{C}$ in der Form $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ an.

Bitte bearbeiten Sie diese Übungsaufgaben bis zur nächsten Übungsstunde am 12.07.2011.