Zu Aufgabe 9a. Es sei $g := (123) \in G := \mathfrak{S}_3$. Da G endlich ist, ist auch die zyklische Untergruppe $\langle g\rangle$ endlich und es gilt $\langle g\rangle = \{g^k : k \in \mathbb{Z}\} = \{g^k : k \in \mathbb{N}\}$. Da aber $g^2 = (132)$ und $g^3 = e$, so natürlich auch für jedes $n = 3k + p$ mit $p \in \{1,2,3\}$ $g^n = g^{3k+p} = g^{3k} \cdot g^p = g^p$ und damit

$$\langle(123)\rangle = \{(123),(132),e\} \qquad \text{und daher} \qquad |\langle(123)\rangle| = 3$$

Als zyklische Gruppe ist dann H isomorph zu der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3Z$.

Zu Aufgabe 9b. Es ist $G = H \cup \{(12),(13),(23)\}$. Da für jedes $h \in H$ automatisch $hHh^{-1} = H$ gilt, reicht es in unserem Fall nur $\tau H\tau^{-1} = H$ für $\tau \in \{(12),(13),(23)\}$ nachzurechen. Wir führen das exemplarisch für $\tau = (12)$ vor:

$$(12)e(12) = e, \qquad (12)(123)(12) = (132) \in H, \qquad (12)(132)(12) = (123) \in H$$

Bemerkung. Es gilt ganz allgemein: G eine beliebige Gruppe und $H < G$ eine beliebige Untergruppe mit $[G : H] = |G/H| = 2$ so ist H ein <u>Normalteiler</u> in G.

Zu Aufgabe 9c. $J = \langle(12)\rangle = \{e,(12)\}$ und $(123)(12)(123)^{-1} = (123)(12)(132) = (23) \notin J$. Damit ist J kein Nornalteiler.

Zu Aufgabe 9d. $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) = \{\mathrm{Id}, \mathrm{Inv}\} \cong \mathbb{Z}_2$ wobei $\mathrm{Inv} : G \to G$ die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist. Es sei jetzt $\psi : J \to \mathrm{Aut}(H) = \{\mathrm{Id}, \mathrm{Inv}\}$ der Homomorphismus mit $\psi(e) = \mathrm{Id}$, $\psi((12)) = \mathrm{Inv}$. Das semidirekte Produkt von H und J ist dann isomorph zu $\mathfrak{S}_3$ und der Isomorphismus ist die Abbildung

$$H \rtimes_\psi J \longrightarrow \mathfrak{S}_3, \qquad (\sigma,\tau) \longmapsto (\sigma \circ \tau).$$

Zu Aufgabe 10a. Es genügt die Abgeschlossenheit der Teimenge G bzgl. der Produktbildungen und Bildung von inversen Elementen zu zeigen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G.$$

Zu Aufgabe 10b.
Normalteiler: $N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\}$
Untergruppe: $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}_{>0} \right\}$
Man verifiziere, dass N eine Normalteiler und H eine Untergruppe aber kein Normalteiler ist.

Zu Aufgabe 10c. Falls $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ so schreiben wir $c\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für den Multiplikationsabbildung $x \mapsto cx$ (welcher ein Automorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ ist). Man betrachte $\psi : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, gegeben durch $\psi(y) := \exp(y)\cdot$. Dann ist das semidirekte Produkt $\mathbb{R} \rtimes_\psi \mathbb{R}$ isomorph zu der Gruppe G. Der entsprechender Isomorphismus lautet

$$G \longrightarrow \mathbb{R} \rtimes_\psi \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto (b, \ln(a))$$

(Der Nachweis der Homomorphie und er Bijektivität sei dem Leser überlassen).