Veranstaltung:	Proseminar mathematisches Problemlösen
Thema:	Invarianten- und Halbinvariantenmethode
Dozentin:	PD Dr. Natalia Grinberg
Referentin:	Katharina Frey
Datum:	03.06.2008

Invarianten- und Halbinvariantenmethode

Gliederung:

1. Einleitungsbeispiel
2. Definition für Invarianten und Halbinvarianten
3. Aufgaben
   3.1 endliche Prozesse mit Aussage über den Endzustand
   3.2 erreichbare Endzustände
   3.3 Aufgaben, die untersuchen, ob ein bestimmter Endzustand-nach endlich vielen Schritten erreichbar ist.

1. Einleitungsbeispiel

Ein Wunderbaum trägt 25 Äpfel und 25 Bananen. Peter pflückt jeden Tag 2 Früchte von diesem Baum, solange, bis nur noch eine übrig bleibt. Pflückt Peter zwei 2 gleiche Früchte, so wächst sofort ein Apfel nach,pflückt er zwei ungleiche Früchte, so wächst sofort eine Banane nach.
Ist die Frucht die übrig bleibt ein Apfel oder eine Banane.

Lösung: Da sich durch das Pflücken, egal in welcher Reihenfolge Peter pflückt, und egal für welche Möglichkeit er sich entscheidet (2 gleiche od. 2 ungleiche Früchte), die Parität der Anzahl, der Bananen nie ändert, ist sie eine Invariante. Die Anzahl der Bananen ist stets ungerade wohingegen die Anzahl der Äpfel zwischen gerade und ungerade wechselt. Da nur eine Frucht übrig bleibt, muss diese eine Banane sein.

2. Definition für Invarianten und Halbinvarianten

- Gegeben ist eine Menge K. (Menge der Anzahl an Äpfeln und Bananen)
- Jedes Element e aus K kann durch eine Vorschrift L auf ein anderes Element e´aus K transformiert werden. (L: werden zwei gleiche Früchte gepflückt wächst ein Apfel nach, ansonsten eine Banane)
- Eine Funktion I auf K heißt Invariante, wenn I(e) = I(e`) gilt. (Die Paritäten der Anzahl der Bananen ist eine Invariante)
- Eine Funktion I auf K heißt Halbinvariante, wenn I(e´)> = I(e) bzw. I(e`)< = I(e) (Die Anzahl der Äpfel und Bananen ist eine Halinvariante)
- wenn I eine Invariante ist und I(e1) nicht = I(e2), dann kann e2 nicht durch L aus e1 erreicht werden (die Parität der Bananen ist immer ungerade, damit kann durch die vorgegebenen Operationen nie eine gerade Bananenanzahl erreicht werden)

3 Aufgaben

3.1 endliche Prozesse mit Aussage über den Endzustand

- <u>Ausgangangszustand:</u> Zahlen 1,..,n stehen an der Tafel
- <u>Operation:</u> pro Schritt werden 2 bel. Zahlen a,b weggewischt und durch die Zahl a+b ersetzt
- <u>Frage:</u> Endet der Prozess nach endlich vielen Schritten? Falls ja, zeigen Sie, dass der letzte Tafelanschrieb unabhängig von der Reihenfolge der Operationen ist.
- <u>Lösung:</u> Die Anzahl, der an der Tafel stehenden Zahlen, nimmt pro Schritt um 1 ab und ist somit eine Halbinvariante, die immer kleiner wird. Der Prozess endet nach n-1

Schritten.Die Zahl m bleibt übrig.
Es stellt sich heraus die Summe, der an der Tafel stehenden Zahlen , in jedem Schritt gleich bleibt -> Die Summe der an der Tafel stehenden Zahlen ist eine Invariante
-> $m = 1+..+n = (n (n+1) / 2)$ (Gaußsche Summenformel)

3.2 erreichbare Endzustände (Käferaufgabe)

- <u>Ausgangszustand:</u> auf einem 3,3 Schachfeld sitzt auf jedem Feld ein Käfer
- <u>Operation:</u> alle Käfer wechseln gleichzeitig ihre Felder, wobei jeder in ein beliebiges Nachbarfeld wechselt (nicht diagonal!!!)
- <u>Frage:</u> Ist es möglich, dass nach dem Wechsel wieder jedes Feld von einem Käfer besetzt ist?
- <u>Lösung:</u> die Felder werden folgendermaßen durchnummeriert: wobei für (j,k) & j+k = gerade, das Feld als gerade bezeichnet wird und für j+k = ungerade das Feld als ungerade bezeichnet wird. Nun ordnen wir jedem Käfer die Parität seines Feldes zu. Im folgenden sei gerade:= 0, ungerade:= 1. Es gibt also 5 Käfer mit der Parität 0 und 4 Käfer mit der Parität 1. Für die Gesamt Parität gilt damit: $P_{anf} \equiv 5\cdot0 + 4\cdot1 \equiv 0 \bmod 2$. Jeder Käfer hat nach dem Wechsel eine Päritätsänderung von 1 erfahren.
  d.h die Parität eines Käfers 1 nach dem Wechsel beträgt $P_{end1} \equiv P_{anf\,1} + 1$
  d.h für die Gesamtparität nach dem Wechsel gilt $P_{end} \equiv P_{anf} + 9 \equiv 1 \bmod 2$.
  Da $P_{end} \neq P_{anf}$ sitzt nach dem Wechsel nicht mehr auf jedem Feld ein Käfer, d.h es gibt auf jeden Fall 2 Käfer die auf einem Feld sitzen.

(1,1)	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	(2,3)
(3,1)	(3,2)	(3,3)

3.3 Aufgaben, die untersuchen, ob ein bestimmter Endzustand-nach endlich vielen Schritten - erreichbar ist.

- <u>Ausgangszustand:</u> $f1(x) = x$
- <u>Operationen:</u> A) $Af(x) = x\, f(x)$
  B) $Bf(x) = 2\, f^2(x) - 1$
- <u>Frage:</u> Kann man f1(x) durch mehrmalige Anwendung der Operationen A und B in die Funktion $f2(x) = x^{2008} + 1$ überführt werden?
- <u>Lösung:</u> Für den Wert 1 gilt: $f(1) = 1$, $Af(1) = 1$, $Bf(1) = 1$, daraus folgt, dass nach jedem Schritt, dass heißt egal wie oft A und B hintereinander angewendet werden, der Funktionswert an der Stelle x=1 immer 1 ist und daher eine Invariante.
  Wäre es nun möglich f1 in f2 zu überführen müsste auch f2 an der Stelle x=1 den Funktionswert 1 haben. Da dies wegen $f2(1) = 2$ nicht der Fall ist, kann man f1 nicht in f2 überführen

Verwendete Quellen

- Grinberg, Natalia, Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker, Verlag Harri Deutsch, 2008
- http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/BzMU/BzMU2005/Beitraege/andzans-ramana-gdm05.pdf