Proseminar: Mathematisches Problemlösen
Thema: Das Schubfachprinzip
Datum: 20.5.2008
Referent: Marian Hoffmann

Das Schubfachprinzip (Dirichletsches Prinzip)

Gliederung:

1. Einleitung

Das Schubfachprinzip ist eines der grundlegenden Prinzipien der Mathematik. Es scheint dabei so offensichtlich, dass man meistens auch nur offensichtliche Ergebnisse erwartet. Die einfachste Formulierung besagt, dass wenn man n+1 Kugeln auf n Schubfächer aufteilt, mindestens in einem Schubfach zwei Kugeln liegen.
Einleitende Beispiele zum Verständnis

- Unter je 13 Personen gibt es mindestens zwei, die im selben Monat Geburtstag haben.
- Unter drei Personen haben mindestens zwei das gleiche Geschlecht.

2. Das Schubfachprinzip

Definition:
Es seien m Objekte in n Kategorien („Schubfächer“) eingeteilt. Wenn m > n ist, so gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Beweis: Der Beweis ist dabei recht einfach. Wenn jede Kategorie höchstens ein Objekt enthalten würde, so gebe es höchstens n Objekte. Dies ist aber ein Widerspruch, da nach Definition mehr Objekte als Schubfächer existieren.

Man sieht für gewöhnlich recht schnell, wann sich das Schubfachprinzip anwenden lässt, allerdings ist es oft schwierig zu bestimmen, was die Schubfächer und was die Objekte sind.

2.1 Übungsblatt für die 8. Klasse

2.2 Beispiele

Geometrisches Problem:

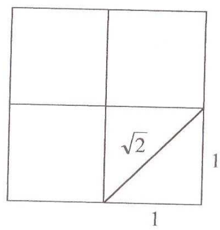

Bild 1.6 Einteilung in Teilquadrate

Wir nehmen uns ein Quadrat mit der Seitenlänge 2. Wenn wir nun Punkte suchen, die alle den Abstand 2 zueinander haben, werden wir nur vier Punkte finden und diese müssen in den Ecken des Quadrats liegen.
Fordert man nun viel weniger, nämlich dass die gesuchten Punkte einen Abstand größer $\sqrt{2}$ haben, müsste man eigentlich mehr als 4 Punkte finden. Dies ist aber nicht so wie die Behauptung zeigt:
Unter je 5 Punkten, die in einem Quadrat der Seitenlänge 2 liegen, gibt es zwei, die einen Abstand ≤ 2 haben.
Was sind nun die Kategorien und Schubfächer, um das Prinzip anwenden zu können? Wir teilen das Quadrat in 4 Teilquadrate der Seitenlänge 1 auf. Alle Punkte in einem Teilquadrat bilden zusammen eine Kategorie. Nun haben

wir jedoch 5 Punkte, aber nur 4 Kategorien, womit nach dem Schubfachprinzip folgt, dass eine Kategorie 2 Punkte enthält, sprich ein Teilquadrat enthält 2 Punkte. Da der maximale Abstand darin aber $\sqrt{2}$ ist (Diagonale) ist der Abstand der Punkte ≤ 2.

Teilbarkeitsproblem:

Aussage: Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.
Beispiel: 8, 17, 21, 25, 33, 49 woran man sieht, dass 33-8=25 durch teilbar ist.
Beweis: Um das Schubfachprinzip anwenden zu können wählen wir die sechs Zahlen als unsere Objekte und 5 Kategorien (hier: „Restklassen“):

- K_0: die Zahlen, die Vielfache von 5 sind ($K_0 = \{x \in N : x \equiv 0 \bmod 5\}$),
- K_1: die Zahlen, die nach Division durch 5 den Rest 1 haben ($K_1 = \{x \in N : x \equiv 1 \bmod 5\}$),
- K_2: die Zahlen, die nach Division durch 5 den Rest 2 haben ($K_2 = \{x \in N : x \equiv 2 \bmod 5\}$),
- K_3: die Zahlen, die nach Division durch 5 den Rest 3 haben ($K_3 = \{x \in N : x \equiv 3 \bmod 5\}$),
- K_4: die Zahlen, die nach Division durch 5 den Rest 4 haben ($K_4 = \{x \in N : x \equiv 4 \bmod 5\}$).

Jede Zahl lässt bei Division durch 5 den Rest 0,1,2,3 oder 4. Also ist jede Zahl in einer der Kategorien vorhanden. Daraus folgt mit dem Schubfachprinzip, dass eine Kategorie mindestens 2 Elemente enthält (zwei Zahlen haben bei Division durch 5 den gleichen Rest). Bildet man nun die Differenz dieser Zahlen heben sich die Reste gegenseitig wieg, somit ist die Differenz durch 5 teilbar.

3. Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Definition:
Seien m Objekte in n Kategorien eingeteilt. Wenn $m > r \cdot n$ ist, so enthält mindestens eine Kategorie mindestens r+1 Objekte.

Beweis: Wenn jede Kategorie höchstens r Elemente hätte, so gäbe es insgesamt höchstens $r \cdot n$ Elemente, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist.

4. Das unendliche Schubfachprinzip

Definition:
Wenn man eine unendliche Menge in endlich viele Kategorien einteilt, gibt es mindestens eine Kategorie, die unendlich viele Elemente enthält.

Beweis: Dies ist ebenfalls einfach zu zeigen. Wenn jede Kategorie nur endliche viele Elemente enthält, dann gäbe es insgesamt auch nur endliche viele Elemente, was nach Definition nicht der Fall ist.

Schriftliche Quellen:

- Beutelspacher, Albrecht, Diskrete Mathematik für Einsteiger, Vieweg, 1. Auflage 2002
- Grinberg, Natalia, Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker, Verlag Harri Deutsch, 2008