

Ungleichungen 1

- Gliederung:
- (1) Welche Ungleichungen gibt es?
 - (2) Axiome
 - (3) Umordnungsungleichung
 - (4) AM-GM Ungleichung

(1) Welche Ungleichungen gibt es?

- (i) Bernoulli Ungleichungen (Z.B.: Potenzfunktionen $(1+x)^n \geq 1+nx$)
- (ii) Bonferroni Ungleichungen (Abschätzung von Wahrscheinlichkeiten eines Ereignis)
- (iii) Dreiecksungleichung (Längen der Kanten eines Dreieckes z.B.: $c \leq a+b$ oder $|a+b| \leq |a|+|b|$)
- (vi) Cauchy-Schwarz Ungl. (Bekannt aus LA und Analysis z.B.: $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$)
- (v) Markow Ungl. (Vergleicht Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert in der Wahrscheinlichkeitstheorie)
- (vi) Mittel Ungleichungen (Vergleicht AM und GM)

(2) Axiome

Für zwei reelle Zahlen a und b gelten folgende Eigenschaften:

- (1) $a < b$
- (2) $a = b$
- (3) $a > b$

Bei Addition und Subtraktion

Für beliebige reelle Zahlen a, b, c und d

- (1) Wenn $a > b$, dann gilt: $a+c > b+c$ und $a-c > b-c$
- (2) Wenn $a < b$, dann gilt: $a+c < b+c$ und $a-c < b-c$
- (3) Wenn $a < b$ und $c < d$, dann gilt $a+c < b+d$ und $a-d < b-c$

Bei Multiplikation und Division

Für beliebige reelle Zahlen a, b und c ($c \neq 0$)

- (1) Wenn c positiv und $a > b$, dann gilt: $a*c > b*c$ und $a/c > b/c$
- (2) Wenn c positiv und $a < b$, dann gilt: $a*c < b*c$ und $a/c < b/c$
- (3) Wenn c negativ und $a > b$, dann gilt: $a*c < b*c$ und $a/c < b/c$
- (4) Wenn c negativ und $a < b$, dann gilt: $a*c > b*c$ und $a/c > b/c$

(3) Umordnungsungleichung

s. Aufgabe: Töpfe

Theorie:

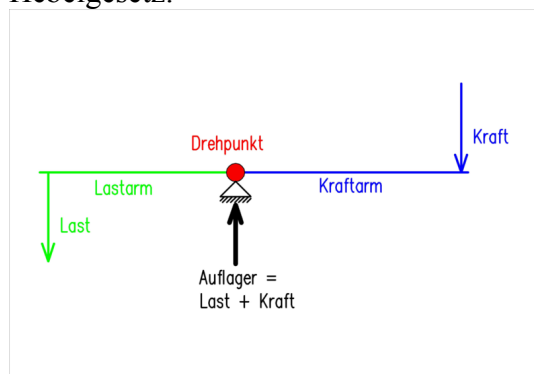
Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $B \subset \mathbb{R}$ zwei endliche Multimengen mit $|A| = |B| = N$. Für jede injektive Abbildung $p: A \rightarrow B$ bezeichnen wir mit S die Summe $S = \sum a \cdot p(a)$. Sind A und B gleichgeordnet, so ist S maximal.

(4) AM-GM Ungleichung

s. Aufgabe Waage

Theorie:

Hebelgesetz:



„Kraft (F_K) mal Kraftarm (l_K) ist gleich Last (F_L) mal Lastarm (l_L)“

Die Kräfte wirken dabei senkrecht auf den jeweiligen Arm.

Man erhält die folgende Gleichung:

$$F_K \cdot l_K = F_L \cdot l_L$$

Die AM-GM Ungleichung:

Das arithmetische Mittel ist größer gleich dem geometrischen Mittel.

$$\bar{x}_{\text{arithm}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \bar{x}_{\text{geom}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$