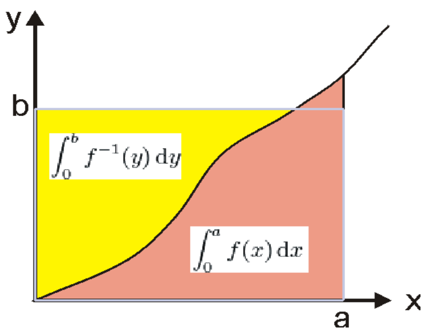
Youngsche Ungleichung

Sei f eine stetige, streng monoton steigende Funktion mit f(0) = 0 und sei f^{-1} die (somit vorhandene) Umkehrfunktion, welche dieselben Eigenschaften besitzt.

Dann gilt für jedes $a, b \geq 0$:

$$\boxed{a*b \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy}$$

Wieso ist das so?
Wie zu sehen, kann das Rechteck aus a*b nicht größer sein als die Fläche der 2 Integrale.



Zu sehen: Fall f(a) > b.

Spezialfall der Youngschen Ungleichung

Sind p,q > 1 mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und a,b > 0, so gilt:

$$\boxed{a*b \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}}$$

Beweis: s. Aufgabenblatt

Der Begriff der Norm ist die Verallgemeinerung des Begriffs der Länge (oder Betrag) eines Vektors, welcher aus der Schule bekannt sein sollte.

Euklidische Norm:
$||a||_2 = (|a_1|^2 + ... + |a_n|^2)^{1/2}$

Die p-Norm, welche eine Verallgemeinerung der euklidischen Norm ist, lautet:
$||a||_p = (|a_1|^p + ... + |a_n|^p)^{1/p}$

Hölder-Ungleichung

Die Hölder-Ungleichung sagt aus, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren (|<a, b>|) betragsmäßig höchstens so groß ist, wie das Produkt der Normen $||a||_p$ und $||b||_q$.

Seien p,q > 1 mit 1/p + 1/q = 1 und a_i, b_i > 0, dann gilt:

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ein Spezialfall der Hölder-Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, sie tritt ein, wenn p = q = 2 ist.

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2.$$

Minkowski-Ungleichung

$|| x + y ||_p <= || y ||_p + || y ||_p$,

welche für p = 2 die Dreiecksungleichung ist.

Ersetzt man hier x durch x – y und das y = y – z, mit dem Punkt z aus R^n, so entsteht die äquivalente Dreiecksungleichung für den Euklidischen Abstand:

$|| x - z ||_2 <= || x - y ||_2 + || y - z ||_2$,

welche besagt, dass der direkte Weg von x nach z in R^n nicht länger ist, als der kürzeste Weg, der von x über y nach z führt.