2. Übungsblatt

Ausgabe: 24. Oktober 2014, Abgabe: 31. Oktober 2014

Aufgabe 1
Sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum. Angenommen, für alle $x, y \in X$ existiert ein *Mittelpunkt*, das heißt ein $m \in X$, so dass

$$d(x, m) = \frac{1}{2}\, d(x, y) = d(m, y)$$

gilt. Zeigen Sie, dass (X, d) ein geodätischer Raum ist.

Aufgabe 2
Sei (X, d) ein vollständiger CAT(0) Raum, $C \subseteq X$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge und sei $\pi_C \colon X \to C$ die Projektion auf C. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für alle $x, y \in X$ gilt $d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y)$, vgl. Satz 1.10(2) der Vorlesung.

b) C ist ein Deformationsretrakt von X.

c) Wie folgt aus *b*) die Kontrahierbarkeit von X?

Aufgabe 3
Das *Produkt* (X, d) von zwei metrischen Räumen (X_1, d_1) und (X_2, d_2) ist die Menge $X = X_1 \times X_2$, ausgestattet mit

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Durch d ist eine Metrik auf X definiert. Diese Metrik wird *Produktmetrik* genannt.

b) Der Raum (X, d) ist genau dann vollständig, wenn (X_1, d_1) und (X_2, d_2) vollständig sind.

c) Das Produkt von zwei CAT(0) Räumen ist ein CAT(0) Raum.

Aufgabe 4
Sei X ein vollständiger CAT(0) Raum, G eine Gruppe von Isometrien und für die Fixpunktmenge gelte $X^G \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

a) X^G ist abgeschlossen.

b) X^G ist konvex, falls X eindeutig geodätisch ist.