Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 3 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Hyperbolische Schraubenlinie. **(4 Punkte)**

Die Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cosh t, \sinh t, t)$$

heißt *hyperbolische Schraubenlinie.*

(a) Bestimmen Sie die Bogenlänge $s(t)$ der Kurve x sowie deren Krümmung $\kappa(s)$ und Torsion $\tau(s)$ als Funktion des Bogenlängenparameters s.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve

$$y : [1, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \ln t, \frac{1}{\sqrt{2}t} \right)$$

durch eine (geeignete) euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie x abgebildet werden kann.

Aufgabe 2. Graph einer Funktion. **(4 Punkte)**

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion. Der Graph von f ist eine ebene Kurve, die parametrisiert werden kann durch

$$x : I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, f(t), 0)\,.$$

Man nennt eine solche Darstellung einer ebenen Kurve auch *explizite Kurvendarstellung.*

(a) Zeigen Sie, dass die Kurve x regulär ist und berechnen Sie ihre Krümmung und Torsion.

(b) Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \cosh t,$ das Frenet-Dreibein von x.

Aufgabe 3. Integration der Frenet-Formeln. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie mit Hilfe der Frenet-Formeln diejenige nach Bogenlänge parametrisierte Kurve

$$x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), x_3(t)\big)$$

mit Torsion Null, deren Krümmung in jedem Punkt gleich $\kappa > 0$ ist und die zum Zeitpunkt $s = 0$ die Anfangsbedingungen

$$x(0) = (\frac{1}{\kappa}, 0, 0),\ \ T(0) = (0, 1, 0) \quad \text{und} \quad N(0) = (-1, 0, 0)$$

erfüllt. Skizzieren Sie diese Kurve.

Hinweis: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so besitzt die Differentialgleichung $f'' = -\kappa^2 f$ die allgemeine Lösung $f(t) = a\cos(\kappa t) + b\sin(\kappa t)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 09.09.2009 in der Übung.