Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

**Differentialgeometrie** **Fachrichtung Geodäsie**

**Lösung zu Übungsblatt 6** **Wintersemester 2009/10**

---

**Aufgabe 2. Drehflächen.**

Eine *Drehfläche* entsteht, indem man eine ebene Kurve um eine Achse dreht. Im Folgenden betrachten wir eine differenzierbare Kurve

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto c(t) = (c_1(t), 0, c_3(t)),$$

in der $(x_1, x_3)$-Ebene und drehen diese um die $x_3$-Achse. Die hierdurch konstruierte Fläche besitzt dann eine Parametrisierung der Form

$$x : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2))\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Parametrisierung regulär ist, falls die Kurve $c$ regulär ist und $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.

**Lösung:** Zunächst halten wir fest, dass die Abbildung $x$ differenzierbar ist, da alle Komponenten differenzierbare Funktionen sind.

Um Regularität nachzuweisen, benötigen wir die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} x_{u^1}(u^1, u^2) &= (-c_1(u^2)\sin u^1, c_1(u^2)\cos u^1, 0), \\ x_{u^2}(u^1, u^2) &= (c_1'(u^2)\cos u^1, c_1'(u^2)\sin u^1, c_3'(u^2)). \end{aligned}$$

Weiter wissen wir, dass die Kurve $c$ regulär ist, also $0 \neq |c'(u^2)|^2 = \big(c_1'(u^2)\big)^2 + \big(c_3'(u^2)\big)^2$.

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} x_{u^1}(u^1, u^2) \times x_{u^2}(u^1, u^2) &= \big(c_1(u^2)c_3'(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)c_3'(u^2)\sin u^1, -c_1(u^2)c_1'(u^2)\big) \\ &= c_1(u^2)\big(c_3'(u^2)\cos u^1, c_3'(u^2)\sin u^1, -c_1'(u^2)\big)\,, \end{aligned}$$

also

$$|x_{u^1}(u^1, u^2) \times x_{u^2}(u^1, u^2)|^2 = \big(c_1(u^2)\big)^2 \Big(\big(c_3'(u^2)\big)^2 + \big(c_1'(u^2)\big)^2\Big) = \big(c_1(u^2)\big)^2 |c'(u^2)|^2\,.$$

Da $c_1(u^2) > 0$ und $|c'(u^2)| \neq 0$ folgt $|x_{u^1}(u^1, u^2) \times x_{u^2}(u^1, u^2)| \neq 0$, d.h. die gegebene Parametrisierung ist regulär.