Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 7 **Wintersemester 2009/10**

Aufgabe 1. Gauß'sches begleitendes Dreibein. **(4 Punkte)**

Skizzieren Sie die durch die Gleichung $$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

definierte Fläche und geben Sie eine Parametrisierung an. Bestimmen Sie ein Gauß'sches begleitendes Dreibein in allen regulären Punkten der Fläche. Wo ist die Fläche nicht regulär?

Aufgabe 2. Sattelfläche. **(4 Punkte)**

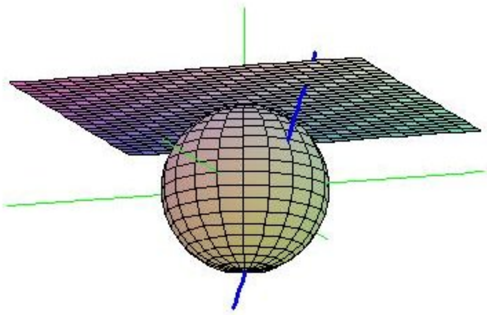
Gegeben sei das parametrisierte Flächenstück $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ u = (u^1, u^2) \mapsto \big(u^1, u^2, u^1 \cdot u^2\big)$.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der obigen Parametrisierung um eine Umparametrisierung der Sattelfläche $\tilde{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto \big(\tilde{u}^1 - \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2\big)$ handelt.

(b) Bestimmen Sie für beide Parametrisierungen ein Gauß'sches begleitendes Dreibein.

Aufgabe 3. Stereographische Projektion. **(4 Punkte)**

Die *stereographische Projektion* ordnet jedem Punkt p der durch die Gleichung $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1$ definierten Einheitssphäre ohne den Südpol $(0, 0, -1)$ genau einen Punkt $\pi(p)$ in der Ebene $E = \{(u^1, u^2, 1) \in \mathbb{R}^3 : u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}$ zu: $\pi(p)$ ist der Schnittpunkt der Geraden durch p und den Südpol mit E.



Insbesondere erhält man dadurch eine Parametrisierung $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2)$ der Einheitssphäre ohne den Südpol, indem den Parametern $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Geraden durch $(u^1, u^2, 1)$ und den Südpol mit der Einheitssphäre zugeordnet wird.

Geben Sie diese Parametrisierung explizit an und zeigen Sie, dass

$$x : U = \{(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2 : (u^1)^2 + (u^2)^2 < 4\} \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2)$$

eine Umparametrisierung der durch

$$\tilde{x} : \tilde{U} = \{(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \in \mathbb{R}^2 : (\tilde{u}^1)^2 + (\tilde{u}^2)^2 < 1\} \to \mathbb{R}^3,\ (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto \tilde{x}\big(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \sqrt{1 - (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2}\big)$$

gegebenen oberen Halbsphäre ist.

Abgabe der Lösungen bis **Montag**, den 07.12.2009 in der Übung.