Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 1 **28.10.2014**

Aufgabe 1 *(Differenzierbare Strukturen auf $\mathbb{R}$)*

Durch die Karten
$$\varphi_1 := id_{\mathbb{R}} \quad \text{und} \quad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$$
werden zwei differenzierbare Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf der topologischen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}$ definiert.
Zeigen Sie, dass einerseits $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$ gilt, aber andererseits die Mannigfaltigkeiten $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_1)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_2)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 2 *(Pullback-Struktur)*

(a) Es seien M ein topologischer Raum, N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $f : M \to N$ ein Homöomorphismus. Definieren Sie eine differenzierbare Struktur auf M, so dass f ein Diffeomorphismus zwischen den Mannigfaltigkeiten M und N wird.

(b) Kann man auf dem Einheitswürfel (als Teilraum des $\mathbb{R}^n$)
$$W := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1\}$$
eine differenzierbare Struktur $\mathcal{A}$ definieren, so dass $(W, \mathcal{A})$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 3 *(Reell projektiver Raum)*

Es sei $P^n\mathbb{R}$ der n-dimensionale reell projektive Raum
Weiter sei $U_i := \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mid x_i \neq 0\} \subset P^n\mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n+1$.

Zeigen Sie, dass
$$\{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \ldots, n+1\}$$
mit den Karten
$$\varphi_i : \ U_i \to \mathbb{R}^n, \ \ [(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$
ein differenzierbarer Atlas von $P^n\mathbb{R}$ ist.