Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 10

20.01.2015

Aufgabe 1 *(Konjugierte Punkte bei nicht-positiver Schnittkrümmung)*

Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, a] \to M$ eine Geodätische. Ein Punkt $\gamma(t_0)$ mit $t_0 \in (0, a]$ heißt *konjugiert zu* $\gamma(0)$ (*längs* γ), falls es ein Jacobi -Feld $J \neq 0$ längs γ gibt, so dass $J(0) = J(t_0) = 0$. Zeigen Sie:

a) Der Punkt $\exp_p(X) \in M$ ist genau dann zu p längs der Geodätischen $\gamma(t) := \exp_p(tX)$ konjugiert, wenn $\mathrm{kern}(d\exp_p)_X \neq \{0\}$.

b) Die Schnittkrümmung von M sei nichtpositiv und J sei ein Jacobi-Feld längs γ. Dann ist die Funktion
$$f : [0, a] \to \mathbb{R},\ t \mapsto ||J(t)||^2$$
konvex.

c) Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht-positiver Schnittkrümmung gibt es keine konjugierten Punkte.

Aufgabe 2 *(Konjugierte Punkte bei positiver Schnittkrümmung)*

Zeigen Sie, dass es auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter positiver Schnittkrümmung konjugierte Punkte gibt.

Aufgabe 3 *(Längenräume, Gauß-Bonnet)*

a) Zeigen Sie, dass Riemannsche Isometrien die Längenmetrik d erhalten.

b) Zeigen Sie, dass es auf dem Torus T^2 keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.