

Differentialgeometrie

Winter-Semester 2014/15

Übungsblatt 10

20.01.2015

Aufgabe 1 (*Konjugierte Punkte bei nicht-positiver Schnittkrümmung*)

Seien (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ eine Geodätische. Ein Punkt $\gamma(t_0)$ mit $t_0 \in (0, a]$ heißt *konjugiert zu $\gamma(0)$ (längs γ)*, falls es ein Jacobi-Feld $J \neq 0$ längs γ gibt, so dass $J(0) = J(t_0) = 0$. Zeigen Sie:

- Der Punkt $\exp_p(X) \in M$ ist genau dann zu p längs der Geodätischen $\gamma(t) := \exp_p(tX)$ konjugiert, wenn $\ker(d\exp_p)_X \neq \{0\}$.
- Die Schnittkrümmung von M sei nichtpositiv und J sei ein Jacobi-Feld längs γ . Dann ist die Funktion

$$f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|J(t)\|^2$$

konvex.

- Auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit nicht-positiver Schnittkrümmung gibt es keine konjugierten Punkte.

Aufgabe 2 (*Konjugierte Punkte bei positiver Schnittkrümmung*)

Zeigen Sie, dass es auf vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter positiver Schnittkrümmung konjugierte Punkte gibt.

Aufgabe 3 (*Längenräume, Gauß-Bonnet*)

- Zeigen Sie, dass Riemannsche Isometrien die Längenmetrik d erhalten.
- Zeigen Sie, dass es auf dem Torus T^2 keine Riemannsche Metrik mit positiver Schnittkrümmung gibt.