Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Moritz Gruber

Differentialgeometrie **Winter-Semester 2014/15**

Übungsblatt 8 **17.12.2014**

Aufgabe 1 *(Parallelverschiebung II)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Weiter sei $c||_a^b$ die Parallelverschiebung bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs entlang c.
Zeigen Sie, dass $c||_a^b$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 2 *(Starrheit von Isometrien)*

Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.
Zeigen Sie: Sind $\phi, \psi : M \to M$ Isometrien und es gibt einen Punkt $p \in M$ in dem die Differentiale übereinstimmen, d.h. $d_p\phi = d_p\psi$, dann gilt $\phi = \psi$.

Aufgabe 3 *(Geodätisches Feld)*

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, D der Levi-Civita-Zusammenhang von M und TM das Tangentialbündel sowie V, W Tangentialvektoren in (p, v) an TM. Weiter seien

$$\alpha : t \mapsto (p(t), v(t))\ , \quad \beta : s \mapsto (q(s), w(s))$$

differenzierbare Kurven mit $p(0) = q(0) = p$, $v(0) = w(0) = v$ und $\alpha'(0) = V$, $\beta'(0) = W$.
Wir definieren ein Inneres Produkt auf $T_{(p,v)}(TM)$ durch

$$\langle V, W\rangle_{(p,v)} := g_p(d_p\pi(V), d_p\pi(W)) + g_p(D_{p'}v(0), D_{q'}w(0))$$

wobei $\pi : TM \to M, (q, w) \mapsto q$ die kanonische Projektion bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass $\langle ., .\rangle$ wohldefiniert ist und TM zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit macht.

Ein Vektor in $T_{(p,v)}(TM)$ heißt *horizontal*, falls er (bzgl. $\langle ., .\rangle$) orthogonal zu

$$\mathrm{Spann}\{[t \mapsto (p, v(t))] \mid v(0) = v\} \cong T_pM \cong \pi^{-1}(p)$$

ist. Eine Kurve in TM heißt *horizontal*, falls alle ihre Tangentialvektoren horizontal sind.

b) Zeigen Sie, dass die differenzierbare Kurve $t \mapsto (p(t), w(t))$ genau dann horizontal ist, wenn das Vektorfeld $w(t)$ parallel entlang der Kurve $p(t)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass das Geodätische Feld von M überall horizontal ist.