Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dr. Michael Wiemeler

Differentialgeometrie | **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 3 | **Wintersemester 2012/13**

Aufgabe 1. Parametrisierung nach Bogenlänge. **(4 Punkte)**

Berechnen Sie für die folgenden Kurven die Bogenlängenfunktion

$$s_0(t) = \int_0^t \|x'(u)\| \, \mathrm{d}u,$$

und parametrisieren Sie die Kurven nach Bogenlänge:

(a) $x : [0, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (1 + 2\cosh t, 1 - \sin 2t, \cos 2t)$

(b) $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \left(\frac{\sqrt{6}}{2} t^2, t, t^3\right)$

Aufgabe 2. Kettenlinie und Traktrix. **(4 Punkte)**

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden parametrisierten Kurven singuläre Punkte besitzen und bestimmen Sie jeweils den Tangenteneinheitsvektor in allen regulären Punkten. Berechnen Sie außerdem die Bogenlängenfunktion $s_0(t) = \int_0^t \|x'(u)\| \, \mathrm{d}u$.

(a) *Kettenlinie:*

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; t \mapsto (t, \cosh t, 0) \, .$$

Diese Kurve erhält man – wie Johann Bernoulli 1690 entdeckte – als Gleichgewichtslage eines an zwei Punkten befestigten (idealen) Seiles.

(b) *Traktrix:*

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \, t \mapsto \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}, 0\right) .$$

Aufgabe 3. Zykloide. **(4 Punkte)**

Rollt ein Kreis K vom Radius $r > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine Kurve, die *Zykloide* genannt wird. Diese kann parametrisiert werden mittels

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(rt - r\sin t, r - r\cos t, 0\big).$$

(a) Bestimmen Sie den Tangentialvektor und die Krümmung in jedem Punkt der Kurve.

(b) Berechnen Sie die Länge von x.

Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$.

Abgabe der Lösungen bis **Donnerstag**, den 8.11.2012 in der Übung.