Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dr. Michael Wiemeler

Differentialgeometrie **Fachrichtung Geodäsie**

Übungsblatt 6 **Wintersemester 2012/13**

Aufgabe 1. Extrema unter Nebenbedingungen. **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := x \cdot y$$

unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Aufgabe 2. Gebietsintegrale. **(4 Punkte)**

Gegeben seien das Dreieck $\triangle \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$, der Viertelkreis

$$D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4,\ x_1, x_2 > 0\}$$

vom Radius 2 im ersten Quadranten, sowie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2^2.$$

Zeigen Sie, dass f sowohl auf $\triangle$ als auch auf D Lebegue integrierbar ist und berechnen Sie die beiden Gebietsintegrale

$$\iint_\triangle f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(x_1, x_2) \quad \text{und} \quad \iint_D f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}(x_1, x_2).$$

Aufgabe 3. Lokale Invertierbarkeit. **(4 Punkte)**

Gegeben sei die offene Menge $U := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ sowie die 3-wertige Funktion von drei Veränderlichen

$$F : U \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}) \in U$ eine Umgebung $W \subseteq U$ existiert, sodass die Einschränkung $F\big|_W : W \to F(W) \subseteq \mathbb{R}^3$ von F eine glatte Umkehrfunktion besitzt.

Abgabe der Lösungen bis **Donnerstag**, den 29.11.2012 in der Übung.