

Aufgabe 1. Flächeninhalte.

(4 Punkte)

Berechnen Sie für $T > 0$ den Flächeninhalt folgender Flächenstücke.

- (a) Elliptisches Paraboloid der Höhe T

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0, 0 < x_3 < T\}$$

- (b) Teil der Sattelfläche

$$\mathcal{F}_T := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1 x_2, x_1^2 + x_2^2 < T\}$$

Aufgabe 2. Zweite Fundamentalform von Drehflächen.

(4 Punkte)

- (a) Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto c(t) := (c_1(t), 0, c_3(t))$ eine reguläre Kurve mit $c_1(t) > 0$. Bestimmen Sie die zweiten Fundamentalgrößen der Drehfläche

$$x : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto x(u^1, u^2) = (c_1(u^2) \cos u^1, c_1(u^2) \sin u^1, c_3(u^2)).$$

- (b) Parametrisieren Sie die Kugel vom Radius $r > 0$ als Drehfläche und berechnen Sie ihre zweite Fundamentalform. Geben Sie außerdem ihre Normalkrümmung in jedem Punkt an.

Aufgabe 3. Rotationstorus.

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen des Rotationstorus' ($0 < r < a$)

$$x : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto ((a + r \cos u^2) \cos u^1, (a + r \cos u^2) \sin u^1, r \sin u^2),$$

indem Sie wie in der Vorlesung ein Extremwertproblem mit Nebenbedingung lösen.

Hinweis: Lassen Sie bei der Rechnung zunächst die ersten und zweiten Fundamentalgrößen als Variable stehen.