

Aufgabe 1. Zylinder.

(4 Punkte)

Wir betrachten den Zylinder mit der Parametrisierung

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1, \sin u^1, u^2).$$

- Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des Zylinders.
- Geben Sie die Differentialgleichungen für Geodätische auf dem Zylinder an.
- Bestimmen Sie alle Geodätische durch den Punkt $x(0, 0) = (1, 0, 0)$.
- Berechnen Sie für jede Geodätische $c : \mathbb{R} \rightarrow x(\mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = x(0, 0) = (1, 0, 0)$ die Funktion $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi]$, die jedem $t \in \mathbb{R}$ den Winkel $\theta(t)$ von c mit dem Breitenkreis durch den Punkt $c(t)$ zuordnet.

Aufgabe 2. Clairaut Relation.

(4 Punkte)

- Wir betrachten das Rotationshyperboloid mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \cosh u^2, \sin u^1 \cosh u^2, \sinh u^2).$$

Zeigen Sie, dass die Geodätische durch den Punkt $(\sqrt{2}, 0, 1)$, die mit dem Breitenkreis einen Winkel von $\pi/4$ ($= 45^\circ$) bildet, die (x_1, x_2) -Ebene nicht schneiden kann.

- Gegeben sei nun die Pseudosphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto \left(\frac{\cos u^1}{\cosh u^2}, \frac{\sin u^1}{\cosh u^2}, u^2 - \tanh u^2 \right),$$

sowie die Geodätische c durch den Punkt $(1, 0, 0)$, die mit dem Breitenkreis $u^2 = 0$ einen Winkel von $\pi/3$ ($= 60^\circ$) bildet. Geben Sie alle Breitenkreise an, die von c geschnitten werden.

Aufgabe 3. Loxodrome.

(4 Punkte)

Gegeben sei die Einheitssphäre mit der Parametrisierung

$$x : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \sin u^2, \sin u^1 \sin u^2, \cos u^2)$$

und das Bild der Kurve $u^1(s) = \ln \cot \left(\frac{\pi - \sqrt{2}s}{4} \right)$, $u^2(s) = \frac{\pi - \sqrt{2}s}{2}$, $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$.

- Berechnen Sie zunächst die geodätische Krümmung der Breitenkreise von x .
- Berechnen Sie die geodätische Krümmung der Loxodrome in jedem Kurvenpunkt.