Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Zwei symmetrische Räume $S = G/K$ und $S^* = G^*/K^*$, deren Riemannsche Metrik jeweils durch die Killing-Form $-B$ bzw. B^* induziert ist, heißen *dual*, falls gilt

(1) es existiert ein Lie-Algebra-Isomorphismus $\widetilde{\delta} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathfrak{k}^*$, sodass

$$B^*(\widetilde{\delta}V, \widetilde{\delta}W) = B(V, W) \qquad \text{für alle } V, W \in \mathfrak{k},$$

(2) es existiert eine lineare Isometrie $\delta : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}^*$, sodass

$$[\delta X, \delta Y] = -\widetilde{\delta}[X, Y] \qquad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

Zeigen Sie:

(a) Duale symmetrische Räume haben entgegengesetzte Schnittkrümmung, d.h.

$$\mathrm{Kr}(\delta(\Pi)) = -\mathrm{Kr}(\Pi) \qquad \text{für jede Ebene } \Pi \subset T_{x_0}S \cong \mathfrak{p}.$$

(b) Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\mathrm{SO}(p+q)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)) \text{ und } \mathrm{SO}(p,q)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q))$$

sind duale symmetrische Räume.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: $\mathrm{Rang}(Pos(n)) = n - 1$.