

## Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14) Übungsblatt 10

### Aufgabe 1

Zwei symmetrische Räume  $S = G/K$  und  $S^* = G^*/K^*$ , deren Riemannsche Metrik jeweils durch die Killing-Form  $-B$  bzw.  $B^*$  induziert ist, heißen *dual*, falls gilt

- (1) es existiert ein Lie-Algebra-Isomorphismus  $\tilde{\delta} : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ , sodass

$$B^*(\tilde{\delta}V, \tilde{\delta}W) = B(V, W) \quad \text{für alle } V, W \in \mathfrak{k},$$

- (2) es existiert eine lineare Isometrie  $\delta : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}^*$ , sodass

$$[\delta X, \delta Y] = -\tilde{\delta}[X, Y] \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{p}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Duale symmetrische Räume haben entgegengesetzte Schnittkrümmung, d.h.

$$\text{Kr}(\delta(\Pi)) = -\text{Kr}(\Pi) \quad \text{für jede Ebene } \Pi \subset T_{x_0}S \cong \mathfrak{p}.$$

- (b) Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten

$$\text{SO}(p+q)/\text{S}(\text{O}(p) \times \text{O}(q)) \quad \text{und} \quad \text{SO}(p, q)/\text{S}(\text{O}(p) \times \text{O}(q))$$

sind duale symmetrische Räume.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie:  $\text{Rang}(\text{Pos}(n)) = n - 1$ .