Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dipl.-Math. Rafaela Dietrich

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)
Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Identifizieren Sie die Heisenberg-Gruppe H(3) als Mannigfaltigkeit mit $\mathbb{R}^3$, d.h. betrachten Sie den Diffeomorphismus

$$\varphi : \mathrm{H}(3) \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $d\varphi|_E : \mathrm{T}_E\mathrm{H}(3) \cong \mathfrak{h}(3) \longrightarrow \mathrm{T}_0\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Via obigem Isomorphismus sind $A, B, C \in \mathfrak{h}(3)$ mit

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad B := \frac{\partial}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad C := \frac{\partial}{\partial z}$$

linksinvariante Vektorfelder auf H(3).

(b) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$.

Aufgabe 2

Für die Lie-Gruppen $G = \mathrm{SO}(n)$ bzw. $G = \mathrm{SU}(n)$ mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ definiert man die *Killing-Form*

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \mathrm{Re}(\mathrm{Spur}(XY)).$$

Zeigen Sie:

(a) B ist eine negativ definite Bilinearform auf $\mathfrak{g}$.

(b) B ist $\mathrm{Ad}(G)$-invariant, d.h. für alle $g \in G$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X, Y).$$

Aufgabe 3

Die Gruppe

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ist eine normale Untergruppe von H(3). Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $\mathrm{H}(3)/N$ keine Matrix-Lie-Gruppe ist, das heißt topologisch nicht isomorph zu einer linearen Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ für ein n.

Verwenden Sie dazu, dass $\mathrm{H}(3)/N$ eine Lie-Gruppe ist und folgendes

Lemma: *Sei G eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ und p eine Primzahl. Gibt es $S, T \in G$, sodass $R := S^{-1}T^{-1}ST$ von Ordnung p ist, und ist $SR = RS$ und $TR = RT$, dann gilt $n \geq p$.*