

Geometrische Gruppentheorie II (WS 2013/14)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Identifizieren Sie die Heisenberg-Gruppe $H(3)$ als Mannigfaltigkeit mit \mathbb{R}^3 , d.h. betrachten Sie den Diffeomorphismus

$$\varphi : H(3) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dann ist $d\varphi|_E : T_E H(3) \cong \mathfrak{h}(3) \rightarrow T_0 \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ ein Vektorraum-Isomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Via obigem Isomorphismus sind $A, B, C \in \mathfrak{h}(3)$ mit

$$A := \frac{\partial}{\partial x}, \quad B := \frac{\partial}{\partial y} + x \cdot \frac{\partial}{\partial z}, \quad C := \frac{\partial}{\partial z}$$

linksinvariante Vektorfelder auf $H(3)$.

(b) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[A, B]$, $[A, C]$ und $[B, C]$.

Aufgabe 2

Für die Lie-Gruppen $G = SO(n)$ bzw. $G = SU(n)$ mit zugehörigen Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ bzw. $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ definiert man die *Killing-Form*

$$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto \operatorname{Re}(\operatorname{Spur}(XY)).$$

Zeigen Sie:

(a) B ist eine negativ definite Bilinearform auf \mathfrak{g} .

(b) B ist $\operatorname{Ad}(G)$ -invariant, d.h. für alle $g \in G$ und alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$B(\operatorname{Ad}(g)X, \operatorname{Ad}(g)Y) = B(X, Y).$$

Aufgabe 3

Die Gruppe

$$N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

ist eine normale Untergruppe von $H(3)$. Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $H(3)/N$ keine Matrix-Lie-Gruppe ist, das heißt topologisch nicht isomorph zu einer linearen Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ für ein n .

Verwenden Sie dazu, dass $H(3)/N$ eine Lie-Gruppe ist und folgendes

Lemma: Sei G eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ und p eine Primzahl. Gibt es $S, T \in G$, sodass $R := S^{-1}T^{-1}ST$ von Ordnung p ist, und ist $SR = RS$ und $TR = RT$, dann gilt $n \geq p$.