Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
Übungsblatt 11

Aufgabe 1

(a) Welche Gruppe beschreibt $\langle a,b | aba^{-1} = b^2, bab^{-1} = a^2\rangle$?

Gegeben sei $G = \langle x,y \mid r_1 := x^2, r_2 := y^3, r_3 := xy^{-1}xy^{-1}\rangle$.

(b) Welche Gruppe ist das?

(c) Ist das eine Dehn-Präsentation? Falls ja, wieso? Falls nein, gibt es eine Dehn-Präsentation dieser Gruppe?

(d) Finden Sie für Ihr Lieblingswort $w \in F$ mit $\pi(w) = 1_G$ (vielleicht nicht gerade das leere Wort!) zwei verschiedene Zerlegungen der Form $\Pi_{i=1}^{k} w_i r_{j_i}^{\pm 1} w_i^{-1}$ mit $w_i \in F$ und $j_i \in \{1,2,3\}$. (Dabei sei wie üblich F frei von $\{x,y\}$ erzeugt und $\pi : F \longrightarrow G$ der zugehörige surjektive Homomorphismus.)

Aufgabe 2

Es seien $\langle X|R\rangle$ und $\langle X'|R'\rangle$ zwei endliche Präsentationen der selben Gruppe G.
Zeigen Sie: Ist das Wortproblem für $\langle X|R\rangle$ entscheidbar, so auch für $\langle X'|R'\rangle$.

Aufgabe 3

(a) Es sei G eine Gruppe, die eine Präsentation mit n Erzeugern und m Relationen besitzt, und T ein weiteres endliches Erzeugendensystem von G mit l Elementen. Zeigen Sie, dass G dann eine Präsentation mit Erzeugendemsystem T und $k \leq m+l$ Relationen besitzt.

(b) Zeigen Sie: Besitzt eine Gruppe G ein endliches Erzeugendensystem S, zu dem es keine endliche Menge an Relationen R gibt, sodass $G = \langle S|R\rangle$, dann ist G durch kein Erzeugendensystem endlich präsentierbar.