Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
M. Sc. Sebastian Plenz

Geometrische Gruppentheorie (SS 2019)
Übungsblatt 3

Aufgabe 1

(a) Die sogenannte *Quaternionengruppe* Q ist die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, die von den beiden Matrizen

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.
Geben Sie einen Cayleygraphen für Q an.

(b) Finden Sie zwei Gruppen G_1 und G_2 mit Cayleygraphen Γ_1 und Γ_2 so, dass Γ_1 und Γ_2 als Graphen gleich sind, aber G_1 nicht isomorph zu G_2 ist.

Aufgabe 2

Die *unendliche Diedergruppe* ist gegeben durch die (endliche) Präsentation

$$D_\infty := \langle \{s,t\} \mid \{s^2 = e, sts = t^{-1}\} \rangle.$$

Sei $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik.
Zeigen Sie, dass für die zugehörige Gruppe der Isometrien gilt $Isom(\mathbb{Z}) \cong D_\infty$.

Aufgabe 3

Sei F_2 die freie Gruppe erzeugt von $\{a,b\}$ und $\varphi : F_2 \to \mathbb{Z}^2$ ein Homomorphismus, sodass $\varphi(a) = (1,0)$ und $\varphi(b) = (0,1)$.
Bestimmen Sie den Kern von φ.