Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

19. 4. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Erinnere Dich an die Definition des semidirekten Produktes. Die steht zum Beispiel auf dem GGT I-Übungsblatt 1 in Aufgabe 2.
$\mathbb{R}$ operiere nun auf $\mathbb{R}^2$ durch $t \cdot (x, y) := (e^t x, e^{-t} y)$. Wir bezeichnen mit $S := \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}$ das durch diese Aktion gegebene semidirekte Produkt.

a) Zeige, dass S als Lie-Gruppe isomorph ist zu

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & x \\ 0 & \lambda^{-1} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_+ \right\} \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

b) Ist S einfach zusammenhängend?

c) Bestimme den Kommutator $[S, S]$ und zeige, dass S auflösbar ist.

Aufgabe 2

Zeige, dass auf der Hyperboloidhalbschale $\mathcal{H}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1,\, z \geq 0\}$ durch die Gleichung

$$-\cosh d_{\mathcal{H}^2}((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' - zz'$$

eine unter der Aktion von $\mathrm{SO}^+(2,1)$ invariante Metrik $d_{\mathcal{H}^2}$ gegeben ist. Zeige ferner, dass dieser Raum zu $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ mit der hyperbolischen Metrik isometrisch ist. Benutze das, um zu zeigen, dass $\mathrm{SO}^+(2,1)$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ isomorph sind.

Hinweis: Alle Hinweise auf diesem Übungsblatt außer diesem befinden sich auf der Rückseite.

Hinweise zur zweiten Aufgabe

Es sieht so aus, als müsste man zunächst nachweisen, dass $d_{\mathcal{H}^2}$ eine Metrik ist. Das wollen wir lieber nicht tun – zur Abschreckung sei auf das entsprechende Kapitel in Ratcliffes „Foundations of Hyperbolic Manifolds“ verwiesen. Stattdessen erinnern wir uns an die Metrik in $\mathbb{H}^2$, die gegeben ist durch

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}.$$

Dann können wir nachrechnen, dass die bijektive Abbildung $\phi : \mathcal{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{2x(1+z)}{x^2 + (y+z+1)^2} + \left(\frac{2(y+z+1)(1+z)}{x^2 + (y+z+1)^2} - 1 \right) i,$$

$d_{\mathcal{H}^2}$ auf $d_{\mathbb{H}}$ transportiert. Insbesondere ist dann $d_{\mathcal{H}^2}$ eine Metrik und ϕ eine Isometrie.

Wissenswertes zu Normalreihen und Kommutatoren

Eine Normalreihe zu einer Gruppe G ist eine absteigende Folge von Untergruppen

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_n = \{1\},$$

sodass $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ ein Normalteiler ist ($i = 1 \dots n$). G heißt auflösbar, wenn sie eine Normalreihe besitzt, sodass alle Faktoren G_{i-1}/G_i abelsch sind. Weiter bezeichne

$$G^{(1)} := G' := [G, G] := \langle \{ aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \} \rangle$$

die erste und induktiv $G^{(i)} := [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$ die i-te abgeleitete oder Kommutator-Untergruppe von G. Es gilt:

a) $G' \subseteq G$ ist ein Normalteiler.

b) G/G' ist abelsch, und es gilt sogar: Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler, sodass G/N abelsch ist, dann gilt $G' \subseteq N$.

c) G ist genau dann auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $G^{(n)} = \{1\}$ gilt.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 25. 4. 2012, um 9:44 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt beim Übungsleiter Deines Vertrauens.