Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

21. 6. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 10

Aufgabe 1
Sei (X, G) eine der beiden 3-dimensionalen Geometrien, die über $\mathbb{H}_2$ fasern (also $X = \mathbb{H}_2 \times \mathbb{R}$ oder $X = \widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$), und G_0 die Identitätskomponente von G. Weiter sei $\rho\colon G \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}_2)$ der von dieser Faserung induzierte Homomorphismus. Zeige: Sei $\Gamma \subseteq G_0$ eine Untergruppe, sodass gelten:

i) $\rho(\Gamma) \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}_2)$ ist ein uniformes Gitter.[1]

ii) $\ker \rho \cap \Gamma \subseteq G_0$ ist ein uniformes Gitter.

Dann ist auch Γ ein uniformes Gitter in G_0.

Aufgabe 2
Es sei $(X, G) = (H_3(\mathbb{R}), \mathrm{Isom}(H_3(\mathbb{R})))$ die 3-dimensionale Nil-Geometrie. $H_3(\mathbb{R})$ fasert über $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\rho\colon G \to \mathrm{Isom}(E_2)$ der durch diese Faserung induzierte Homomorphismus und $G_0 \subseteq G$ die Identitätskomponente.

a) Ist $\Gamma \subseteq G_0$ diskret, dann ist auch $\rho(\Gamma)$ diskret, oder die Aktion von $\rho(\Gamma)$ auf E_2 hat einen Fixpunkt oder eine Fixgerade.

b) Finde für diese drei Situationen jeweils ein Beispiel.

Abgabe würde mich weiterhin freuen...

[1] d.h. diskret und kokompakt