Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

26. 4. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei X ein homogener Raum zu einer Liegruppe G. Einen (X,G)-Atlas auf einer Mannigfaltigkeit nennen wir (X,G)-Struktur, wenn er unter Inklusion maximal ist. Wie man es sich wünscht, ist jeder (X,G)-Atlas in einer eindeutigen (X,G)-Struktur enthalten. Zeige:

a) Seien $(M,\mathcal{A})$, $(M,\mathcal{A}')$ zwei (X,G)-Mannigfaltigkeiten. Dann *erzeugen* $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ genau dann die gleiche (X,G)-Struktur[1], wenn $\mathrm{id}_M\colon (M,\mathcal{A}) \to (M,\mathcal{A}')$ eine (X,G)-Abbildung ist.

b) Sei $f\colon M' \to M$ eine lokaler Homöomorphismus zwischen Hausdorff-Räumen und $(M,\mathcal{A})$ eine (X,G)-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es *genau* eine (X,G)-Struktur $\mathcal{A}'$ auf M', sodass $f\colon (M',\mathcal{A}') \to (M,\mathcal{A})$ eine (X,G)-Abbildung ist. (Die Existenz wurde in der Vorlesung schon gezeigt.) Diese (X,G)-Struktur $\mathcal{A}'$ bezeichnen wir auch mit $f^*\mathcal{A}$.

Aufgabe 2
Zwei (X,G)-Mannigfaltigkeiten $(M,\mathcal{A})$ und $(N,\mathcal{B})$ heißen (X,G)-äquivalent, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ gibt, sodass φ und φ^{-1} beide (X,G)-Abbildungen sind. Zeige, dass dies äquivalent zur Existenz eines Diffeomorphismus $\varphi\colon M \to N$ ist, der eine (X,G)-Abbildung ist.

Aufgabe 3
Wie in der Vorlesung bezeichne $E(n)$ die euklidische Isometriegruppe des $\mathbb{R}^n$. Die Standard-$(\mathbb{R}^2,E(2))$-Struktur[2] auf $\mathbb{R}^2$ werde mit $\mathcal{A}$ bezeichnet. Wir identifizieren wie üblich $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und betrachten die Exponentialabbildung

$$\exp\colon \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ z \mapsto \exp(z).$$

a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \exp^*(\mathcal{A}_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}))$ als $(\mathbb{R}^2,E(2))$-Mannigfaltigkeit nicht äquivalent zur Euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2,\mathcal{A})$ ist.

b) Sind $(\mathbb{R}^2, \exp^*(\mathcal{A}_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}))$ und die Euklidische Ebene affin äquivalent, also äquivalent als $(\mathbb{R}^2,\mathrm{Aff}(2))$-Mannigfaltigkeiten?

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 2. 5. 2012, um 9:44 Uhr beim Übungsleiter Deines Vertrauens.

[1] sind also in der gleichen (X,G)-Struktur enthalten
[2] also die vom Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\}$ erzeugte