Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

3. 5. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Für $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir $T_A := \mathbb{R}^2 / (A \cdot \mathbb{Z}^2)$.

a) Zeige, dass T_A eine eindeutige Euklidische Struktur besitzt, sodass die Projektion $\pi_A \colon \mathbb{R}^2 \to T_A$, $z \mapsto z + A \cdot \mathbb{Z}^2$ Euklidisch, also eine $(\mathbb{R}^2, E(2))$-Abbildung ist.

b) Sei $A \in \mathrm{O}(2)$ und bezeichne I die Einheitsmatrix. Zeige, dass T_I und T_A Euklidisch äquivalente Mannigfaltigkeiten sind.

c) Zeige: Für alle $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ sind T_A und T_I affin äquivalent.

d) Finde eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass T_B nicht Euklidisch äquivalent zu T_I ist.

Aufgabe 2

Es sei $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $|\lambda| \neq 1$. Die von λ erzeugte zyklische Untergruppe operiert durch Multiplikation auf $\mathbb{C}^\times$. Wir bezeichnen den Quotienten mit $\mathfrak{T}_\lambda := \mathbb{C}^\times / \lambda^{\mathbb{Z}}$.

a) Zeige, dass $\mathfrak{T}_\lambda$ eine zu $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ diffeomorphe affin flache Mannigfaltigkeit[1] ist.

b) Zeige, dass $\mathfrak{T}_\lambda$ und $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ nicht affin äquivalent sind.

Aufgabe 3

Die auf dem ersten Übungsblatt mit S bezeichnete Liegruppe heiße nun **Sol**. Wir erinnern uns an die Heisenberg-Gruppe H_3, die wir schon im letzten Semester betrachtet haben:

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Berechne den Kommutator $[H_3, H_3]$.

b) Erinnere Dich ans Zentrum $Z(H_3)$ oder berechne es noch einmal.

c) Berechne das Zentrum $Z(\mathbf{Sol})$ und zeige, dass gilt: $H_3 \not\cong \mathbf{Sol}$.

d) Zeige: H_3 ist nilpotent.

Abgabe bis spätestens Mittwoch, 9. 5. 2012, um 9:44 Uhr direkt beim Übungsleiter Deines Vertrauens.

[1] d. h. eine $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Aff}(n))$-Mannigfaltigkeit