Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

16. 5. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Es sei L eine einfach zusammenhängende Liegruppe mit linksinvarianter (X, G)-Struktur.

a) Überlege Dir zunächst, dass die Linksmultiplikation von L auf sich selbst einen Gruppenhomomorphismus $\rho\colon L \to G$ induziert, die sogenannte *Entwicklungsdarstellung*.
b) Zeige: Kern $\rho \subseteq L$ ist ein diskreter Normalteiler.
c) Zeige, dass L genau dann eine vollständige (X, G)-Mannigfaltigkeit ist, wenn $\rho(L)$ transitiv auf X operiert.

Aufgabe 2
Wie in der Vorlesung definieren wir $H^{2,1} := \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w^2 + x^2 - y^2 - z^2 = -1\}$.

a) Fasse $\mathrm{SU}(1, 1)$ auf geeignete Weise als Untergruppe von $\mathrm{O}(2, 2)$ auf und zeige, dass $\mathrm{SU}(1, 1)$ transitiv auf $H^{2,1}$ operiert.
b) Zeige, dass $\mathrm{SU}(1, 1)$ eine linksinvariante $(H^{2,1}, \mathrm{O}(2, 2))$-Struktur besitzt.

Aufgabe 3
Es sei (X, d) ein lokalkompakter metrischer Raum. Zeige: Wenn (X, d) homogen ist (d. h. wenn $\mathrm{Iso}(X, d)$ transitiv auf X operiert), dann ist X bezüglich d vollständig.

Abgabe würde mich weiterhin freuen. . .