Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

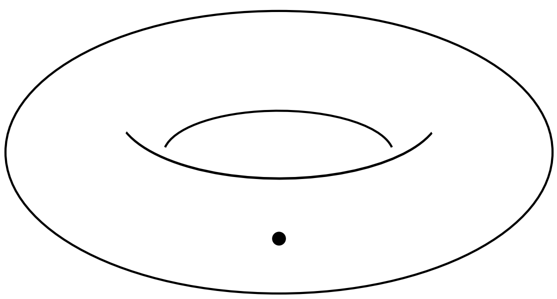
24. 5. 2012

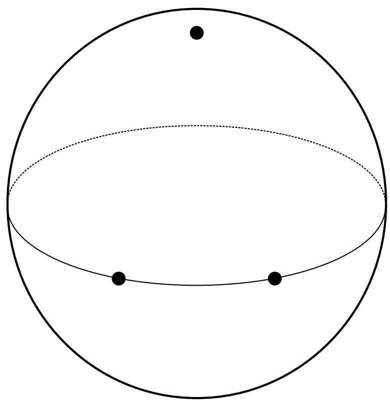
Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Es sei X ein einfach zusammenhängender homogener Raum für eine Liegruppe G. Weiter sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zeige, dass es eine natürliche Bijektion gibt zwischen den Äquivalenzklassen vollständiger (X, G)-Strukturen auf M und den Konjugationsklassen diskreter Untergruppen $\Gamma \leq G$, die frei auf X operieren, sodass X/Γ zu M diffeomorph ist.

Aufgabe 2
Es sei M eine affin flache n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Geodätische auf M ist eine stetige Abbildung $\alpha\colon I_\alpha \to M$, sodass $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend ist und α lokal von der Form $t \mapsto tv + w$ für gewisse (von der jeweiligen Karte abhängige) $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist. Eine Geodätische $\alpha\colon I_\alpha \to M$ heißt vollständig fortsetzbar, wenn sie sich zu einer Geodätischen $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R} \to M$ fortsetzen lässt.
Zeige: M ist genau dann eine vollständige affin flache Mannigfaltigkeit, wenn sich jede Geodätische vollständig fortsetzen lässt.

Aufgabe 3
Zeige, dass $\mathbb{P}^{1*} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ und $E^* := (\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2) \setminus \{0\}$ isomorphe Fundamentalgruppen besitzen, aber nicht homöomorph sind. Beide besitzen Strukturen als vollständige hyperbolische Mannigfaltigkeiten. (*Zusatzaufgabe*: Beweise das!) Was hat das mit der ersten Aufgabe zu tun?





Abgabe würde mich weiterhin freuen…