Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

31. 5. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Es sei $(X, G) = (\mathbf{Sol}, G)$ der Modellraum der 3-dimensionalen **Sol**-Geometrie. Wie in der Vorlesung gesehen, ist $G \cong \mathbf{Sol} \rtimes \mathcal{I}$ ein semidirektes Produkt von **Sol** mit einer 8-elementigen Gruppe $\mathcal{I}$ von Liegruppen-Automorphismen von **Sol**. Finde eine 2-Parameter-Familie von G-invarianten Riemannschen Metriken auf **Sol**.

Aufgabe 2

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\phi\colon M \to M$ ein Diffeomorphismus. Dann erhält man den Abbildungstorus M_ϕ aus $M \times [0, 1]$, indem man $M \times \{0\}$ und $M \times \{1\}$ via ϕ identifiziert.

a) Zeige, dass M_ϕ ein Bündel über S^1 mit Faser M ist.

b) Wann ist M_ϕ das triviale Bündel $M \times S^1$?

c) Finde Beispiele (M, ϕ), sodass M_ϕ diffeomorph zum reellen 2-Torus bzw. zur Kleinschen Flasche ist.

Aufgabe 3

Es sei $T := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ der reelle 2-Torus und $\phi\colon T \to T$ ein affiner Diffeomorphismus, der von $\tilde{\phi}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto A \cdot v$ $(A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ herkommt. Es seien λ_1, λ_2 die Nullstellen des Charakteristischen Polynoms von A.

a) Sei $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. Zeige, dass der Abbildungstorus T_ϕ eine Struktur als vollständige $(\mathbf{Sol}, G)$-Mannigfaltigkeit hat.

b) *Zusatzfrage:* Was kann im Fall $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ alles passieren?

Abgabe würde mich weiterhin freuen. . .