Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
HDoz. Dr. Oliver Baues
Dr. Florian Nisbach

14. 6. 2012

Geometrische Gruppentheorie II – Übungsblatt 9

Aufgabe 1

In Aufgabe 1 des achten Übungsblattes haben wir gesehen, dass das Einheitstangentialbündel der 2-Sphäre T^1S^2 diffeomorph zu SO(3) ist. Zeige, dass SU(2) die universelle Überlagerungs-Liegruppe von SO(3) ist und folgere daraus, dass T^1S^2 diffeomorph zu $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (und damit insbesondere nicht zum trivialen Bündel $S^2 \times S^1$) ist.

Aufgabe 2

Wir schreiben $\mathbb{R}^n = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^{n-d}\}$ $(1 \leq d \leq n-1)$. Eine d-dimensionale *Blätterung* $\mathcal{F}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist ein Atlas, dessen Kartenwechsel $\phi\colon V \subseteq \mathbb{R}^n \to V' \subseteq \mathbb{R}^n$ alle von der Form

$$\phi\colon (x,y) \mapsto (\phi_1(x,y), \phi_2(y))$$

sind.

a) Sei $\mathcal{F}$ eine Blätterung auf M. Weiter sei $x \in$, und $\varphi : U \ni x \to V$ eine Karte aus $\mathcal{F}$. Dann ist $T_x^{\mathcal{F}}M := \varphi^*\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_d}\rangle$ ein d-dimensionaler Unterraum von T_xM. Zeige, dass dieser nicht von φ abhängt.

b) Zeige, dass jeder Punkt $x \in M$ in genau einer maximalen zusammenhängenden Untermannigfaltigkeit $\mathcal{F}_x$ enthalten ist, für die gilt:

$$\forall y \in \mathcal{F}_x\colon T_y\mathcal{F}_x = T_y^{\mathcal{F}}M.$$

Diese Untermannigfaltigkeiten heißen *Blätter* von $\mathcal{F}$.

c) Gib je eine Blätterung auf $\mathbb{R}^2$ an, die zu einer Blätterung auf $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ absteigt, bei der alle Blätter kompakt bzw. alle Blätter nicht kompakt sind.

d) *Zusatzaufgabe:* Finde eine Blätterung auf dem Torus mit genau zwei kompakten Blättern.

Abgabe würde mich weiterhin freuen…