Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Karlsruher Institut für Technologie

Lineare Algebra II
Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (P)

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ aus Eigenvektoren von A und eine orthogonale Matrix $S \in \mathbf{O}(4)$, so dass
$$S^\top AS$$
eine Diagonalmatrix ist.

b) Zeigen Sie, dass es eine Orthogonalbasis $\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4\}$ gibt, für die
$$\langle \tilde{b}_i, A\tilde{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \in \{1, 2\} \\ -1, & i = j = 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
gilt (beachten Sie, dass hier *keine* Orthonormalbasis gesucht ist).

c) Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathbf{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $T^\top AT = \mathrm{Diag}(1, 1, -1, 0)$ gilt.

Aufgabe 2 (P)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungierte Endomorphismen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V gibt, so dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sowohl Eigenvektoren von Φ als auch von Ψ sind.

Aufgabe 3

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Sei weiter $|\det(\Phi)| = 1$ und es gelte für alle $v \in V$:

$$\|v\| \leq 1 \Rightarrow \|\Phi(v)\| \leq 1\,.$$

Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Isometrie ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 09.06.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.