Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (P)

Seien V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum, Φ ein Endomorphismus von V und Φ^* die adjungierte Abbildung zu Φ. Zeigen Sie:

a) Der Endomorphismus Φ ist genau dann selbstadjungiert, wenn Φ *normal* ist, d.h. $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$, und alle Eigenwerte von Φ reell sind.

b) Der Endomorphismus Φ ist genau dann *anti-selbstadjungiert*, d.h. $\Phi^* = -\Phi$, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ rein imaginär, also reelle Vielfache von i sind.

c) Der Endomorphismus Φ ist genau dann eine Isometrie, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ den Betrag 1 haben.

d) Gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 2$ mit $\Phi^k = \Phi^*$ und ist Φ bijektiv, so ist Φ eine Isometrie.

Aufgabe 2 (P)

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Isometrie (bezüglich dem Standardskalarprodukt) mit $\det(\Phi) = 1$. Weiter gelte

$$\Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Drehachse, die Drehebene, den Drehwinkel sowie die Normalform $\widetilde{A}$ von Φ. Geben Sie außerdem eine Orthonormalbasis an, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\widetilde{A}$ hat.

Aufgabe 3

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Weiter sei $\pi_U : V \to V$ die Orthogonalprojektion auf einen Untervektorraum $U \subset V$.

a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Spiegelung $\sigma_U := \mathrm{id}_V - 2\pi_U$.

b) Es sei $n \geq 2$. Gegeben seien $x, y \in V$ mit $\|x\| = \|y\|$.
Finden Sie einen Untervektorraum U, so dass gilt: $\sigma_U(x) = y$ und $\sigma_U(y) = x$.

Abgabe der Lösungen bis zum 23.06.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.