Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2017
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Moritz Gruber
M. Sc. Julia Heller

Lineare Algebra II
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (P)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Weiter sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform P bezüglich der Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ definiert durch $P(b_1, b_1) = 2$, $P(b_1, b_2) = 1$, $P(b_1, b_3) = -1$, $P(b_2, b_2) = -2$, $P(b_2, b_3) = 1$ und $P(b_3, b_3) = \alpha$.

a) Stellen Sie die Matrix von P bezüglich B auf.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist P *nicht-ausgeartet*? (D.h. für $v \in V$ folgt aus $P(w, v) = 0$ für alle $w \in V$, dass $v = 0$.)

c) Sei nun $\alpha = -1$. Bestimmen Sie durch Basiswechsel die Matrix von P bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (P)

Es sei V ein reller Vektorraum und $f, g \in V^*$ Linearformen.

a) Zeigen Sie, dass
$$f \otimes g : V \times V \to \mathbb{R}, \ (v, w) \mapsto f(v) \cdot g(w)$$
eine Bilinearform ist.

b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und seien f und g bezüglich der Standardbasis durch die Abbildungsmatrizen
$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ M(g) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben.
Bestimmen Sie die Matrix von $f \otimes g$ (bzgl. der Standardbasis), die zugehörige quadratische Form Q und die Matrix der zu Q gehörigen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 3

Es seien V, W zwei Vektorräume über dem Körper K. Das *Tensorprodukt* $V \otimes W$ von V mit W ist (bis auf Isomorphie) als der K-Vektorraum definiert, der folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:
Es gibt eine bilineare Abbildung $T : V \times W \to V \otimes W$, sodass für jeden weiteren K-Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to Z$, es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi} : V \otimes W \to Z$ gibt mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ T$.

Seien nun V und W endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass $V \otimes W$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(V^*, W)$ ist.

Abgabe der Lösungen bis zum 30.06.2017 um 12 Uhr in den entsprechenden **gelben Briefkasten Ihres Tutoriums im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30)**. Bitte **heften Sie Ihre Abgabe ordentlich zusammen** und **vermerken Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** auf jedem Blatt. Jede (P)-Aufgabe wird mit **maximal 6 Punkten** bewertet.