Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Gabriele Link
Dipl.-Math. Rafaela Rollin

Mathematik II (Sommersemester 2015)
Übungsblatt 8

Bitte beachten Sie die geänderte Abgabefrist!

Aufgabe 1
Definiere eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + \tfrac{1}{4}x_2y_2 + \tfrac{1}{3}(x_1y_2 + x_3y_3 + x_2y_1),$$

wobei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ gelte.

a) Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = [\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Aufgabe 2
Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie aus diesen Vektoren mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 3
Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Beweisen Sie:

a) Ist $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\} \subset V$ ein Orthonormalsystem, dann sind $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ linear unabhängig.

b) Ist $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\}$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 + ... + \langle \vec{v}, \vec{b}_n \rangle \vec{b}_n.$$

(D.h. die Koordinaten von $\vec{v}$ bezüglich B sind $\langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle$, ... $\langle \vec{v}, \vec{b}_n \rangle$.)

Abgabe der Lösungen bis Montag, den 8.6.2015, 18 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.