

## Mathematik II (Sommersemester 2015)

### Übungsblatt 10

**Aufgabe 1** Bei einer bimolekularen Reaktion bilde sich aus jeweils einem Molekül einer Substanz A und einem Molekül einer Substanz B ein Molekül einer dritten Substanz X. Die Konzentration  $x(t)$  von X sei anfänglich 0, die von A sei anfangs  $a$  und die von B sei  $b$ . Die Reaktion stoppt, wenn nicht mehr beide Substanzen, A und B, verfügbar sind. Die Reaktionsgeschwindigkeit, d.h. die Zunahme von  $x(t)$ , ist proportional zu  $(a - x(t))$  und zu  $(b - x(t))$ . Daher beschreibt man den Reaktionsprozess durch die Differentialgleichung

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t))$$

(mit einem geeigneten Proportionalitätsfaktor  $k$ ).

- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a$ ,  $b$  und  $k$  eine allgemeine Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung.
- Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems  $x(0) = 0$ .

*Hinweis:* Machen Sie eine Fallunterscheidung:  $a = b$  und  $a \neq b$ .

**Aufgabe 2** Gegeben sei die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = 2ty(t) + t.$$

- Geben Sie die Störfunktion an.
- Begründen Sie, ob es sich um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt, indem Sie die Koeffizientenfunktion(en) angeben.
- Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung für den Anfangswert  $y(0) = 1$ .

**Aufgabe 3** Gegeben sei die lineare Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y''''(t) = y(t) + t$$

mit Störfunktion  $b(t) = t$ .

- Zeigen Sie, dass die Funktionen  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ ,  $e^t$ ,  $e^{-t}$  ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bilden.

*Hinweis:* Werten Sie die Wronski-Determinante an einer günstigen Stelle  $t$  aus.

- Eine partikuläre Lösung für diese Gleichung ist

$$y_p(t) = -t.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung der Gleichung an.

---

**Abgabe** der Lösungen bis Dienstag, den 23.6.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.