

## Mathematik I (Wintersemester 2015/2016) Übungsblatt 5

### Aufgabe 1

- a)  $\log_2 16$  ist eine natürliche Zahl. Welche?  
b) Es sei  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Zeigen Sie die folgende Rechenregel:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \text{für alle } x > 0.$$

- c) Außerdem sei  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Zeigen Sie die Gleichung

$$\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x, \quad \text{für alle } x > 0.$$

- d) Zeigen Sie, dass  $\log_2 3$  irrational ist.

(*Hinweis:* Erinnern Sie sich an den Beweis zu Satz 1.1:  $\sqrt{2}$  ist irrational.)

### Aufgabe 2

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = 2 \cdot e^{i\pi/6}.$$

- b) Finden Sie ein  $r > 0$  und ein  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , so dass gilt:

$$1 + i = r \cdot e^{i\varphi}.$$

- c) Zeigen Sie: Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$e^{i(\alpha-\beta)} = e^{i\alpha} \cdot \overline{e^{i\beta}}.$$

Benutzen Sie dabei die Additionstheoreme und die Eulersche Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  für  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 3

 Gegeben seien die Polynome

$$p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 8$$

und

$$q(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- a) Zeigen Sie, dass sich die rationale Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

auch als Polynom darstellen lässt.

- b) Bestimmen Sie die Zerlegung von  $p$  in Linearfaktoren über  $\mathbb{C}$  und irreduzible Faktoren über  $\mathbb{R}$ .  
c) Skizzieren Sie den Graphen von  $q$ .

---

**Abgabe** der Lösungen bis Montag, den 30.11.2015, 12 Uhr in den Briefkasten Ihres Tutoriums im Foyer des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30). Bitte **heften** Sie Ihre Abgabe zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem **Namen**, Ihrer **Matrikelnummer** und der **Gruppennummer** Ihres Tutoriums.