

I.1 (4 Punkte)

Für eine reelle Zahl x sei

$$A_x := \begin{pmatrix} x/2 & -x/2 \\ -x/2 & x/2 \end{pmatrix},$$

und es sei $G = \{A_x \mid x \neq 0\}$.

Zeigen Sie, dass G mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe ist, und geben Sie einen Isomorphismus zu der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ an.

Lösung:

Zunächst werden die Gruppeneigenschaften für (G, \cdot) nachgewiesen:

i) Die Verknüpfung ist abgeschlossen, denn für x_1, x_2 aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$A_{x_1} \cdot A_{x_2} = \begin{pmatrix} x_1/2 & -x_1/2 \\ -x_1/2 & x_1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2/2 & -x_2/2 \\ -x_2/2 & x_2/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2/2 & -x_1x_2/2 \\ -x_1x_2/2 & x_1x_2/2 \end{pmatrix} = A_{x_1x_2}. \quad (1)$$

Somit liegt $A_{x_1} \cdot A_{x_2}$ in G .

ii) Matrizenmultiplikation ist assoziativ, somit ist die Verknüpfung assoziativ.

iii) (G, \cdot) ist kommutativ, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$A_{x_1} \cdot A_{x_2} \stackrel{(1)}{=} A_{x_1x_2} \stackrel{(1)}{=} A_{x_2} \cdot A_{x_1}.$$

iv) A_1 ist neutrales Element, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$A_x \cdot A_1 \stackrel{iii)}{=} A_1 \cdot A_x \stackrel{(1)}{=} A_{1 \cdot x} = A_x.$$

v) Jedes Element aus G hat ein inverses Element, denn für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$A_{\frac{1}{x}} \cdot A_x \stackrel{iii)}{=} A_x \cdot A_{\frac{1}{x}} \stackrel{(1)}{=} A_{x \cdot \frac{1}{x}} = A_1.$$

Somit ist $A_{\frac{1}{x}}$ inverses Element zu A_x .

Insgesamt folgt, dass (G, \cdot) eine abelsche Gruppe ist.

Definiere die Abbildung $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ durch:

$$A_x = \begin{pmatrix} x/2 & -x/2 \\ -x/2 & x/2 \end{pmatrix} \mapsto x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dann ist Φ ein Gruppenhomomorphismus, denn für $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\Phi(A_{x_1} \cdot A_{x_2}) \stackrel{(1)}{=} \Phi(A_{x_1x_2}) = x_1 \cdot x_2 = (x_1) \cdot (x_2) = \Phi(A_{x_1}) \cdot \Phi(A_{x_2}).$$

Weiterhin gilt für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $A_x \in G$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\Phi(A_x) = y \Leftrightarrow y = x.$$

Somit ist Φ injektiv und surjektiv und damit insgesamt ein Isomorphismus von G zu der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

I.2 (4 Punkte)

- a) Es seien Φ und Ψ zwei Endomorphismen eines \mathbb{K} -Vektorraums V und $c \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $U_c := \{x \in V \mid \Phi(x) = c \Psi(x)\}$ ein Untervektorraum von V ist.
- b) Seien nun speziell $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und die Endomorphismen Φ, Ψ durch die Abbildungsmatrizen A, B bezüglich der Standardbasis gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$ mit $U_c \neq \{0\}$ und die zugehörigen Untervektorräume U_c .

Lösung: a) (*Untervektorraumkriterium*)

Zunächst ist $U_c \neq \emptyset$, da $0 \in U_c$ für alle $c \in \mathbb{K}$.

Es bleibt zu zeigen, dass für alle $x, y \in U_c$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$x + y \in U_c \text{ und } \lambda x \in U_c.$$

Für alle $x, y \in U_c$ gilt $\Phi(x) = c \Psi(x)$ und $\Phi(y) = c \Psi(y)$. Wegen der Linearität von Φ und Ψ folgt

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y) = c \Psi(x) + c \Psi(y) = c \Psi(x + y)$$

und für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) = \lambda c \Psi(x) = c \Psi(\lambda x).$$

Es folgt $x + y \in U_c$ und $\lambda x \in U_c$ und somit ist U_c Untervektorraum von V .

b) Genau dann gilt $x \in U_c$, wenn $(A - cB)x = 0$, d. h. U_c ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2c \\ 0 & 1 - c & 0 \\ -c & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gauß-Verfahren erhalten wir das folgende äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2c \\ 0 & 1 - c & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 2c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $c \neq \pm 1$ ist $x = 0$ die einzige Lösung des Systems, also $U_c = \{0\}$.

Für $c \in \{1, -1\}$ ist das Gleichungssystem nichttrivial lösbar. Die gesuchten Werte für c sind damit genau $c = 1$ und $c = -1$.

Für $c = 1$ erhält man $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

Für $c = -1$ ergibt sich $U_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$.

I.3 (4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Vektorraum reeller Matrizen

$$V = \{X \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{Spur}(X) = 0\}$$

mit Basis

$$T = \left\{ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $A \in V$ die Abbildung

$$\Phi_A : V \rightarrow V, \quad X \mapsto AX - XA$$

linear ist.

b) Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in V$. Geben Sie die Abbildungsmatrix von Φ_A bezüglich der Basis T an.

c) Bestimmen Sie $\det(\Phi_A)$ für beliebiges $A \in V$.

Lösung:

(a) Es seien $X, Y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Phi_A(X + Y) &= A(X + Y) - (X + Y)A = AX + AY - XA - YA = (AX - XA) + (AY - YA) \\ &= \Phi_A(X) + \Phi_A(Y) \end{aligned}$$

und

$$\Phi_A(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX - XA) = \lambda\Phi_A(X).$$

Somit ist Φ_A linear.

(b) Berechne $\Phi_A(T_1)$, $\Phi_A(T_2)$, $\Phi_A(T_3)$ und schreibe sie als Linearkombination von T_1, T_2, T_3 :

$$\Phi_A(T_1) = AT_1 - T_1A = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot T_1 - 2b \cdot T_2 + 2c \cdot T_3,$$

$$\Phi_A(T_2) = AT_2 - T_2A = \begin{pmatrix} -c & 2a \\ 0 & c \end{pmatrix} = -c \cdot T_1 + 2a \cdot T_2 + 0 \cdot T_3,$$

$$\Phi_A(T_3) = AT_3 - T_3A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ -2a & -b \end{pmatrix} = b \cdot T_1 + 0 \cdot T_2 - 2a \cdot T_3.$$

Somit erhalten wir als Abbildungsmatrix für Φ_A zur Basis T die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ -2b & 2a & 0 \\ 2c & 0 & -2a \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist $\Phi_A(A) = AA - AA = 0$, d.h. Φ_A hat für $A \neq 0$ nichttrivialen Kern. Für $A = 0$ ist Φ_A die Nullabbildung. Somit ist Φ_A nicht invertierbar und es gilt

$$\det(\Phi_A) = 0.$$

Alternativ kann man dies auch über die Determinante der Matrix aus Teil (b) berechnen (Sarrus-Regel):

$$\det(\Phi_A) = \det \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ -2b & 2a & 0 \\ 2c & 0 & -2a \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - (2c)(2a)b - 0 - (-2a)(-2b)(-c) = -4abc + 4abc = 0.$$

I.4 (4 Punkte)

Im Vektorraum \mathbb{R}^3 seien $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ die Standardbasis und $B^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ die zugehörige Dualbasis.

Es sei die Menge $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ gegeben durch

$$c_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $(\frac{3}{2}b_2^* + 2b_3^*)(\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix})$.

b) Zeigen Sie, dass C eine Basis von \mathbb{R}^3 ist.

c) Es sei C^* die Dualbasis zu C . Stellen Sie die Vektoren von C^* als Linearkombination der Vektoren von B^* dar.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}b_2^* + 2b_3^*\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} &= \left(\frac{3}{2}b_2^* + 2b_3^*\right)(8b_2 + 15b_3) = \\ &= \frac{3}{2}b_2^*(8b_2) + \frac{3}{2}b_2^*(15b_3) + 2b_3^*(8b_2) + 2b_3^*(15b_3) = \frac{3}{2} \cdot 8 + 2 \cdot 15 = 42, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass b_i^* , $i = 1, 2, 3$, linear ist und $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 3$ gilt.

b) Sei $C := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrix, deren Spalten gerade die Vektoren c_1, c_2, c_3 sind. Da

$$\det C = (-8 - 8 + 6) - (8 - 4 - 12) = -2 \neq 0,$$

sind die Spalten c_1, c_2, c_3 linear unabhängig.

c) Sei C die Matrix aus b), deren Spalten die Vektoren c_1, c_2, c_3 sind. Aus der Bedingung $c_i^*(c_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq 3$, sehen wir, dass die Zeilen der Inversen von C Darstellungsmatrizen der Linearformen c_i^* , $i = 1, 2, 3$ sind.

Invertieren von C :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Die Inverse von $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ist also $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -5 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Zeilen liefern die Dualbasis von c_1, c_2, c_3 , d.h. es ist

$$c_1^* = b_1^* - b_2^* + \frac{1}{2}b_3^*, \quad c_2^* = -5b_1^* + 4b_2^* - b_3^*, \quad c_3^* = 4b_1^* - 3b_2^* + b_3^*.$$

I.5 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle 2×2 -Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie, dass F zwei verschiedene reelle Eigenwerte γ und $1 - \gamma$ besitzt, und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume E_γ und $E_{1-\gamma}$.
- b) Stellen Sie $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren von F dar.
- c) Berechnen Sie für $n \geq 1$ den Eintrag a_n der n -ten Potenz $F^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

Lösung: a) Das charakteristische Polynom von F ist

$$p(X) = \det(F - X \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - X & 1 \\ 1 & -X \end{pmatrix} = X^2 - X - 1.$$

Damit hat p in \mathbb{R} die beiden Nullstellen

$$\gamma_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Es gilt $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Für $\gamma \in \{\gamma_1, \gamma_2\}$ ergeben sich die Eigenräume E_γ zu

$$E_\gamma = \text{Kern}(F - \gamma \cdot E_2) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 - \gamma & 1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 + \gamma(1 - \gamma) \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Nun ist $\gamma^2 - \gamma - 1 = p(\gamma) = 0$. Wir erhalten also

$$E_\gamma = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{bzw.} \quad E_{1-\gamma} = \left[\begin{pmatrix} 1 - \gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

b) Wir haben

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 - \gamma \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha - \beta)\gamma + \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn $\alpha = -\beta$ und $2\alpha\gamma - \alpha = 1$. Wir erhalten also $\alpha = \frac{1}{2\gamma-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ und entsprechend $\beta = -\frac{1}{2\gamma-1} = \mp \frac{1}{\sqrt{5}}$.

c) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot F^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_n.$$

Induktiv sehen wir, dass

$$v_1 := \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 - \gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren von F^n zu den Eigenwerten $(\lambda_1)^n = \gamma^n$ und $(\lambda_2)^n = (1 - \gamma)^n$ sind. Hieraus ergibt sich mit b), dass

$$a_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot F^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot F^n \cdot (\alpha v_1 + \beta v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\alpha \lambda_1^n v_1 + \beta \lambda_2^n v_2) = \frac{\gamma^{n+1} - (1 - \gamma)^{n+1}}{2\gamma - 1}.$$

Wir erhalten also

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

I.6 (4 Punkte)

Für die natürliche Zahl $n \geq 1$ sei A_n die reelle $n \times n$ -Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} -1 & \text{falls } i = j - 1, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ j^2 & \text{falls } i = j + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = n!$ gilt.

Lösung:

Es gilt
$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1^2 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} \det A_1 &= \det(1) = 1 = 1! \\ \det A_2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 = 2! \end{aligned}$$

Induktionsschluss: Wir setzen in der Induktionsannahme voraus, dass $\det A_k = k!$ gilt für alle $k \leq n$ und zeigen durch Entwicklung nach der letzten Spalte von A_{n+1} unter Verwendung der Induktionsannahme, dass $\det A_{n+1} = (n+1)!$ gilt.

$$\begin{aligned} \det A_{n+1} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-1)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & n^2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & (n-1)^2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 2^2 & 1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & (n-2)^2 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix} \\ &= \det A_n + n^2 \det A_{n-1} = n! + n^2(n-1)! = n! \cdot (1+n) = (n+1)! \end{aligned}$$

Hinweis: Zu beachten ist, dass wegen der zweistufigen Rekursion $\det A_{n+1} = \det A_n + n^2 \det A_{n-1}$ der Induktionsanfang für $n = 1$ und $n = 2$ nachzuweisen ist.

II.1 (4 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}.$$

- a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform \tilde{A} von A .
 b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$, so dass $S^{-1}AS = \tilde{A}$ gilt.

Lösung: a) Das charakteristische Polynom $p(X) = \det(A - X \cdot E)$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} p(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1-X & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3-X & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1-X & -1 & -2 \\ 0 & 2-X & 2-X & 0 \\ -X & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot(-1) \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2-X & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = (-X)^2 \cdot (2-X)^2 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 2. Die zugehörigen Eigenräume E_λ und Haupträume H_λ (Index jeweils gleich zwei) zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned} E_0 = \text{Kern}(A) &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad H_0 = \text{Kern}(A^2) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{bzw.} \\ E_2 = \text{Kern}(A - 2E) &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad H_2 = \text{Kern}(A - 2E)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Für beide Eigenwerte λ gilt $\dim H_\lambda - \dim E_\lambda = 1$, und es gibt jeweils ein Jordankästchen der Länge 2 zu λ . Somit hat \tilde{A} folgende Form:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Wähle $b_2 \in H_0 \setminus E_0$. Dann ergibt sich b_1 als $A \cdot b_2$. Analog ergibt sich aus $b_4 \in H_2 \setminus E_2$ der Vektor $b_3 = (A - 2E) \cdot b_4$. Wir wählen und berechnen

$$b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = A \cdot b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = (A - 2E) \cdot b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Basiswechselmatrix S hat damit die Gestalt $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n mit Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sei ein Untervektorraum U gegeben.

- a) Wann heißt eine lineare Abbildung $\Pi_U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Orthogonalprojektion auf U ?
- b) Seien U und W Untervektorräume von \mathbb{R}^n und Π_U bzw. Π_W die Orthogonalprojektionen auf U bzw. W . Weiter gelte

$$\langle (\Pi_W - \Pi_U)(x), x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass $U \subset W$ gilt und $\Pi_W - \Pi_U$ die Orthogonalprojektion auf $W \cap U^\perp$ ist.

Lösung:

- a) Für einen Untervektorraum U eines endlichdimensionalen Vektorraums V gilt $V = U \oplus U^\perp$, wobei U^\perp das orthogonale Komplement von U bezeichnet. Damit lässt sich jeder Vektor x eindeutig in der Form $x = u + u^\perp$ mit $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$ darstellen. Die lineare Abbildung $\Pi_U : x = u + u^\perp \mapsto u$ heißt dann die Orthogonalprojektion auf U .
- b) Sei $u \in U$. Dann gibt es $w \in W$, $w^\perp \in W^\perp$ mit $u = w + w^\perp$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (\Pi_W - \Pi_U)(u), u \rangle = \langle \Pi_W(w + w^\perp) - \Pi_U(u), w + w^\perp \rangle \\ &= \langle w - u, w + w^\perp \rangle = \langle w, w \rangle - \langle u, w + w^\perp \rangle = \|w\|^2 - \|u\|^2 \\ &= \|w\|^2 - (\|w\|^2 + \|w^\perp\|^2) = -\|w^\perp\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

woraus $w^\perp = 0$ folgt. Dies zeigt $u = w \in W$, d.h. $U \subset W$.

Die Abbildung $\Pi_W - \Pi_U$ ist linear, da Π_U, Π_W linear sind. Ferner gilt $(W \cap U^\perp)^\perp = W^\perp + U^{\perp\perp} = W^\perp + U$.

Ist $x \in W \cap U^\perp$, so folgt

$$(\Pi_W - \Pi_U)(x) = \Pi_W(x) - \Pi_U(x) = x - 0 = x.$$

Ist $y \in U + W^\perp$, so ist $y = u + w^\perp$ mit $u \in U$ und $w^\perp \in W^\perp$. Daher gilt

$$\begin{aligned} (\Pi_W - \Pi_U)(y) &= \Pi_W(y) - \Pi_U(y) = \Pi_W(u + w^\perp) - \Pi_U(u + w^\perp) \\ &= \Pi_W(u) + 0 - \Pi_U(u) - \Pi_U(w^\perp) = u - u - 0 = 0, \end{aligned}$$

da $u \in U \subset W$, $w^\perp \in W^\perp \subset U^\perp$. Da $\Pi_W - \Pi_U$ linear ist, folgt $(\Pi_W - \Pi_U)(x + y) = x$ für $x \in W \cap U^\perp$ und $y \in (W \cap U^\perp)^\perp$, d.h. $\Pi_W - \Pi_U$ ist Orthogonalprojektion auf $W \cap U^\perp$.

II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ selbstadjungierte Endomorphismen von V .

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) $\text{Bild } \Phi \subseteq \text{Kern } \Psi$.
- (ii) $\Phi \circ \Psi$ ist die Nullabbildung.
- (iii) $\text{Bild } \Phi \perp \text{Bild } \Psi$.

Lösung:

Wir zeigen die Äquivalenz der Aussagen mit einem Ringschluss $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

(i) \Rightarrow (ii): Sei $\text{Bild}(\Phi) \subseteq \text{Kern}(\Psi)$.

$$\Rightarrow \forall y \in V : \Psi \circ \Phi(y) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall x, y \in V : \langle \Phi \circ \Psi(x), y \rangle &= \langle \Psi(x), \Phi^*(y) \rangle = \langle x, \Psi^* \circ \Phi^*(y) \rangle \\ &= \langle x, \Psi \circ \Phi(y) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x \in V : \Phi \circ \Psi(x) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi \circ \Psi \text{ ist die Nullabbildung.}$$

(ii) \Rightarrow (iii): Sei $\Phi \circ \Psi$ die Nullabbildung.

$$\Rightarrow \forall x, y \in V : \langle \Phi(x), \Psi(y) \rangle = \langle x, \Phi^* \circ \Psi(y) \rangle = \langle x, \Phi \circ \Psi(y) \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in V : \Phi(x) \perp \Psi(y)$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(\Phi) \perp \text{Bild}(\Psi)$$

(iii) \Rightarrow (i): Sei $\text{Bild}(\Phi) \perp \text{Bild}(\Psi)$.

$$\text{Sei } y = \Phi(x) \in \text{Bild}(\Phi).$$

$$\Rightarrow \forall z \in V : \langle \Psi(y), z \rangle = \langle \Psi \circ \Phi(x), z \rangle = \langle \Phi(x), \Psi^*(z) \rangle = \langle \Phi(x), \Psi(z) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \Psi(y) = 0$$

$$\Rightarrow y \in \text{Kern}(\Psi)$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(\Phi) \subseteq \text{Kern}(\Psi)$$

II.4 (4 Punkte)

Mit der Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

wird ein Endomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$ des euklidischen Standardvektorraums \mathbb{R}^4 definiert.

- Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Isometrie ist.
- Bestimmen Sie die euklidische Normalform \tilde{A} von Φ sowie eine ONB B von \mathbb{R}^4 , bezüglich der die Abbildungsmatrix von Φ diese Normalform annimmt.

Lösung:

a) Die Matrix A ist orthogonal, denn es gilt $A^\top A = E_4$. Also ist Φ eine Isometrie des \mathbb{R}^4 .

b) Zur Bestimmung der Normalform betrachten wir die Matrix

$$B := A + A^\top = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}E_4.$$

Die Matrix B hat den 4-fachen Eigenwert $\lambda = \sqrt{2}$. Die Normalform \tilde{A} von A besteht daher aus zwei Drehkästchen mit $\cos \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} = 1/\sqrt{2}$ und $\sin \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} = 1/\sqrt{2}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung einer geeigneten ONB betrachten wir einen Eigenvektor x_1 von B zum Eigenwert λ . Wegen $E_\lambda(B) = \mathbb{R}^4$ können wir $x_1 \in \mathbb{R}^4$ mit $\|x_1\| = 1$ beliebig wählen, etwa $x_1 := e_1$. Dann ist

$$Ax_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Orthogonalisieren und Normieren liefert} \quad y_1 := \frac{\tilde{y}_1}{\|\tilde{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun wählen wir x_2 mit $\|x_2\| = 1$ aus $[x_1, y_1]^\perp$, etwa $x_2 := e_4$. Dann ist

$$Ax_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und Orthogonalisieren und Normieren in } [x_2, Ax_2] \text{ liefert} \quad y_2 := \frac{\tilde{y}_2}{\|\tilde{y}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine ONB, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix \tilde{A} hat, ist demnach

$$\mathcal{B} := \{x_1, y_1, x_2, y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

II.5 (4 Punkte) Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, für die es eine natürliche Zahl $d \geq 1$ gibt, so dass A^d die Einheitsmatrix ist. Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^n .

Zeigen Sie:

a) Durch

$$\langle x, y \rangle_A := \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i x, A^i y \rangle$$

wird ein Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n definiert, und der Endomorphismus $\Phi : x \mapsto A \cdot x$ ist eine lineare Isometrie bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

b) A ist diagonalisierbar.

c) Es gilt $\text{Spur}(A) = \overline{\text{Spur}(A^{-1})}$.

Lösung: a) Für $x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^n$ und $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle x_1 + cx_2, y \rangle_A &= \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i(x_1 + cx_2), A^i y \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i x_1 + cA^i x_2, A^i y \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i x_1, A^i y \rangle + \sum_{i=0}^{d-1} \langle cA^i x_2, A^i y \rangle \\ &= \langle x_1, y \rangle_A + c \langle x_2, y \rangle_A, \end{aligned}$$

also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ linear im ersten Argument. Dabei wurde ausgenutzt, dass die Multiplikation mit A^i linear ist und das Standardskalarprodukt auch linear im ersten Argument ist.

Weiter gilt für $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle_A = \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i x, A^i y \rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \overline{\langle A^i y, A^i x \rangle} = \overline{\sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i y, A^i x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle_A}.$$

Also ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ hermitesch.

Schließlich gilt für $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$: $\langle x, x \rangle_A = \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i x, A^i x \rangle > 0$, da alle Summanden ≥ 0 sind und der für $i = 0$ positiv ist: $\langle A^0 x, A^0 x \rangle = \langle x, x \rangle > 0$. Daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ positiv definit.

Somit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n .

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt: $\langle Ax, Ay \rangle_A = \sum_{i=0}^{d-1} \langle A^i Ax, A^i Ay \rangle = \sum_{i=1}^d \langle A^i x, A^i y \rangle = \langle x, y \rangle_A$, da $A^d = A^0$ die Einheitsmatrix ist. Mithin ist die Multiplikation mit A eine Isometrie von \mathbb{C}^n bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$.

b) Da jede lineare Isometrie im Komplexen diagonalisierbar ist (Spektralsatz für normale Endomorphismen), gilt dies auch für (die Multiplikation mit) A .

c) Die Eigenwerte von A sind alle vom Betrag 1, da A eine Isometrie beschreibt. Es sei A ähnlich zu $\text{diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. Dann gilt wegen $|\zeta_i| = 1$

$$\zeta_i^{-1} = \overline{\zeta_i}, \quad \text{da } 1 = |\zeta_i|^2 = \zeta_i \overline{\zeta_i}.$$

Folglich ist A^{-1} ähnlich zu $\text{diag}(\zeta_1^{-1}, \dots, \zeta_n^{-1}) = \text{diag}(\overline{\zeta_1}, \dots, \overline{\zeta_n})$.

Das führt zu

$$\text{Spur}(A^{-1}) = \sum_{i=1}^n \overline{\zeta_i} = \overline{\sum_{i=1}^n \zeta_i} = \overline{\text{Spur}(A)}.$$

II.6 (4 Punkte)

In der reellen affinen Ebene \mathbb{A}^2 seien die drei Punkte $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ und $r = (r_1, r_2)$ gegeben.

Zeigen Sie: p, q, r liegen genau dann auf einer gemeinsamen affinen Geraden, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Lösung:

Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei $\tilde{x} := \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiter sei $M = (\tilde{p} \ \tilde{q} \ \tilde{r})$ die Matrix, deren Determinante in der Aufgabenstellung auftaucht.

Die zu beweisende Aussage ist sicher richtig, wenn $p = q$ gilt, denn dann liegen die Punkte mit den drei Namen auf (mindestens) einer Geraden, und außerdem gilt $\det(M) = 0$, da die ersten zwei Spalten \tilde{p} und \tilde{q} von M übereinstimmen.

Es gelte also $p \neq q$. Wir zeigen die beiden Richtungen der zu beweisenden Äquivalenz:

" \Rightarrow " Wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, so ist dies die Verbindungsgerade von p und q , also

$$p + \mathbb{R}(q - p) = \{(1 - x) \cdot p + x \cdot q \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Auf dieser Geraden liegt r genau dann, wenn

$$\exists x \in \mathbb{R} : r = (1 - x)p + xq.$$

Dies wiederum impliziert

$$\tilde{r} = (1 - x)\tilde{p} + x\tilde{q},$$

und daher sind die drei Spalten von M linear abhängig, was $\det(M) = 0$ impliziert.

" \Leftarrow " Wenn $\det(M) = 0$ ist, dann sind die drei Spalten von M linear abhängig. Dabei sind die ersten beiden Spalten wegen $p \neq q$ linear unabhängig. Dies sieht man indirekt:

Nimmt man an, es existiert $(x, y) \neq (0, 0)$ mit $x\tilde{p} + y\tilde{q} = 0$, dann folgt durch Betrachtung der letzten Komponente $x = -y$. Damit ergibt sich $xp + (-x)q = 0$ und somit $p = q$.

Da \tilde{p} und \tilde{q} demnach linear unabhängig sind, ist \tilde{r} eine Linearkombination der beiden:

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\tilde{p} + y\tilde{q} = \tilde{r}.$$

Wieder durch Betrachtung der letzten Komponente sieht man, dass $x + y = 1$ gilt, also

$$r = (1 - y)p + yq.$$

Daher liegt r auf der Verbindungsgeraden von p und q .