Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

21.10.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei R ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann der Ring der formalen Potenzreihen $R[\![X]\!] = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in R\}$ noethersch ist.

b) Zeige, dass der Ring $\{f \in \mathbb{R}[\![X]\!] \mid f$ konvergiert auf $\mathbb{R}\}$ nicht noethersch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper und $V \subset k^3$ gegeben durch

$$V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}.$$

Zeige, dass V eine affine Varietät ist, und bestimme das Verschwindungsideal $I(V) \subset k[X, Y, Z]$. V heißt übrigens *getwistete Kubik*.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.

a) Zeige: Für ein nichtkonstantes Polynom $g \in k[X]$ und ein $a \in k^\times$ ist $g^2 - a$ kein Quadrat in $k[X]$.

b) Nun sei k unendlich und $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Zeige, dass jede polynomiale Abbildung $\Phi : k \to k^2$, $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x))$ mit $f_1, f_2 \in k[X]$, deren Bild in der Nullstellenmenge V_λ des Polynoms $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$ liegt, konstant ist. Gilt das auch für $\lambda = 0$?

c) Skizziere für $k = \mathbb{R}$ die Nullstellenmenge V_λ für

- $\lambda = 0$,
- $\lambda = 1$,
- $\lambda = 2$.

Abgabe bis Freitag, den 28.10.2011, vor Beginn der Übung oder vorher in Zimmer 4A-04 des Allianzgebäudes 05.20.