

## Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 1

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

- a) Sei  $R$  ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann der Ring der formalen Potenzreihen  $R[[X]] = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in R\}$  noethersch ist.
- b) Zeige, dass der Ring  $\{f \in \mathbb{R}[[X]] \mid f \text{ konvergiert auf } \mathbb{R}\}$  nicht noethersch ist.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $k$  ein unendlicher Körper und  $V \subset k^3$  gegeben durch

$$V = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\}.$$

Zeige, dass  $V$  eine affine Varietät ist, und bestimme das Verschwindungsideal  $I(V) \subset k[X, Y, Z]$ .  $V$  heißt übrigens *getwistete Kubik*.

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$ .

- a) Zeige: Für ein nichtkonstantes Polynom  $g \in k[X]$  und ein  $a \in k^\times$  ist  $g^2 - a$  kein Quadrat in  $k[X]$ .
- b) Nun sei  $k$  unendlich und  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ . Zeige, dass jede polynomiale Abbildung  $\Phi : k \rightarrow k^2$ ,  $\Phi(x) = (f_1(x), f_2(x))$  mit  $f_1, f_2 \in k[X]$ , deren Bild in der Nullstellenmenge  $V_\lambda$  des Polynoms  $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$  liegt, konstant ist. Gilt das auch für  $\lambda = 0$ ?
- c) Skizziere für  $k = \mathbb{R}$  die Nullstellenmenge  $V_\lambda$  für
- $\lambda = 0$ ,
  - $\lambda = 1$ ,
  - $\lambda = 2$ .

**Abgabe** bis Freitag, den 28.10.2011, vor Beginn der Übung oder vorher in Zimmer 4A-04 des Allianzgebäudes 05.20.