Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

22.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich    Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

# Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 10

Auf diesem Blatt bezeichne $k$ immer einen Körper.

**Aufgabe 1** *von unschätzbarem Wert* (4 Punkte)

Vergleiche affine Varietäten mit projektiven Varietäten. Wo unterscheiden sich die Definitionen von Morphismen, regulären Abbildungen, ... und wo nicht? Welche wichtigen Zusammenhänge und Sätze gibt es in der affinen und welche in der projektiven Welt?

Ziel dieser Aufgabe ist also, dass ihr euch einen Überblick darüber verschafft, was wir in den ersten beiden Kapiteln gelernt haben.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Sei $V$ eine quasiprojektive Varietät über $k$ und $x \in V$.

a) Sei weiter $\mathcal{O}_{V,x}$ der lokale Ring von $V$ in $x$. Weiter sei für eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von $x$ der in der Vorlesung eingeführte $k$-Algebren-Homomorphismus $\psi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_{V,x}, f \mapsto f_x = [(U, f)]$.

   Zeige, dass die $\psi_x^U$ zusammen mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{U'}^U : \mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_V(U')$ für offene $U' \subseteq U \subseteq V$ ein injektives System bilden. Zeige also:

   i) $\psi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \psi_x^U$ und

   ii) für jede $k$-Algebra $A$ mit Homomorphismen $\varphi_x^U : \mathcal{O}_V(U) \to A$ für offene Umgebungen $U \subseteq V$ von $x$, so dass für alle offenen $U' \subseteq U$ stets $\varphi_x^{U'} \circ \rho_{U'}^U = \varphi_x^U$ gilt, gibt es genau einen Homomorphismus $\Phi : \mathcal{O}_{V,x} \to A$ mit $\Phi \circ \psi_x^U = \varphi_x^U$ für alle offenen Umgebungen $U \subseteq V$ von $x$.

b) Sei nun $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ die Zerlegung von $V$ in irreduzible Komponenten und $U$ eine offene Umgebung von $x$ in $V$.

   Zeige: Gilt für alle $i \in I$ mit $x \notin V_i$, dass $U \cap V_i = \emptyset$, so ist $\psi_x^U$ injektiv.

**Aufgabe 3** (2 Punkte)

Die Charakteristik von $k$ sei $\neq 2$. Für die getwistete Kubik $V_1 = V(Y - X^2, Z - X^3) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ gilt bekanntlich $I(V_1) = (Y - X^2, Z - X^3)$. Die Varietät $V_2 = V(X^2 + Y^2 - Z^2) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$ ist ein Doppelkegel.

Bestimme jeweils eine Basis des Tangentialraums $T_{V_i,p}$ für jeden Punkt $p = (a, b, c) \in V_i$.

Bitte wenden!

**Aufgabe 4** *(Aufblasung der Ebene)* (6 Punkte)
Nun sei $k$ algebraisch abgeschlossen und

$$X = \{((x_1, x_2), (y_1 : y_2)) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}.$$

Man nennt $X$ die *Aufblasung* von $\mathbb{A}^2(k)$ im Punkt $(0,0)$. Außerhalb von $(0,0)$ sieht $X$ aus wie die affine Ebene, aber den Ursprung hat man zu einer projektiven Geraden „aufgeblasen". Die Punkte des $\mathbb{P}^1(k)$ entsprechen den Richtungen von Geraden durch den Nullpunkt.

Sei $\pi : X \to \mathbb{A}^2(k)$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Faser $E = \pi^{-1}((0,0))$ über dem Ursprung nennt man *exzeptionelle Kurve* der Aufblasung. Für eine Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ mit $(0,0) \in C$ heißt der Abschluss von $\pi^{-1}(C \setminus \{(0,0)\})$ in $X$ die *strikte Transformierte* von $C$.

Zeige:

a) $X$ wird vermöge der Segre-Einbettung $\Psi : \mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^5(k)$ von Blatt 7 zu einer irreduziblen quasiprojektiven Varietät.

   *Hinweis: Für die Irreduzibilität helfen b) und c).*

b) $\pi$ ist ein surjektiver Morphismus, der $X_0 = \{x \in X \mid \pi(x) \neq (0,0)\}$ isomorph auf $\mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ abbildet.

c) Es sei $[v] \in \mathbb{P}^1(k)$ die Äquivalenzklasse von $v \in \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0)\}$ und $L_v = \{tv \mid t \in k\}$ die Ursprungsgerade in Richtung $v$. Zeige, dass die strike Transformierte von $L_v$ durch

$$\{(tv, [v]) \in X \mid t \in k\}$$

   gegeben ist. Folgere, dass jeder Punkt in $E$ im Abschluss einer Menge aus $X_0$ liegt.

d) Durch Aufblasen kann man algebraische Varietäten desingularisieren. Im einfachsten Fall sieht eine Singularität zum Beispiel wie der Punkt $(0,0)$ des Achsenkreuzes $V(XY) \subset \mathbb{A}^2(k)$ aus.

   Zeige, dass sich die strikten Transformierten der $x$- und der $y$-Achse in $X$ nicht mehr schneiden.

e) Eine weitere Verwendung der Aufblasung besteht darin, aus rationalen Abbildungen Morphismen zu machen. Als Beispiel betrachten wir

$$\varphi : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(k), \quad (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2).$$

   Zeige, dass ein Morphismus $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{P}^1(k)$ existiert, so dass $\tilde{\varphi}(x) = \varphi \circ \pi(x)$ für alle $x \in X_0$ gilt.

WIR WÜNSCHEN EUCH EIN SCHÖNES WEIHNACHTSFEST
UND ALLES GUTE FÜR DAS JAHR 2012!

**Abgabe** bis Freitag, den 13.1.2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.