Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

20.01.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 11

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein Ring, A eine R-Algebra. Mit $\underline{A\text{-Mod}}$ bezeichnen wir die Kategorie der A-Moduln.

a) Wir werden zeigen, dass der Funktor von $\underline{A\text{-Mod}}$ nach $\underline{A\text{-Mod}}$ mit $M \mapsto \mathrm{Der}_R(A, M)$ darstellbar ist.

Betrachte dazu den freien A-Modul F mit der Basis A, wobei X_f das Basiselement zu $f \in A$ bezeichne. Weiter sei U der Untermodul von F, der von allen $X_{f+g} - X_f - X_g$, $X_{\lambda f} - \lambda X_f$ und $X_{f \cdot g} - f \cdot X_g - g \cdot X_f$ für $f, g \in A$ und $\lambda \in R$ erzeugt wird.

Zeige, dass der sogenannte *Differentialmodul* $\Omega_{A/R} := F/U$ zusammen mit $d\colon A \to \Omega_{A/R}$, $f \mapsto \overline{X_f} =: df$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation $\delta\colon A \to M$ existiert genau eine A-lineare Abbildung $\varphi\colon \Omega_{A/R} \to M$ mit $\delta = \varphi \circ d$.

b) Zeige, dass für $A = R[X_1, \dots, X_n]$ der Differentialmodul $\Omega_{A/R}$ ein freier Modul mit Basis $dX_1, \dots, dX_n$ ist.

Lösung:

b) In der Übung bin ich bei der linearen Unabhängigkeit der dX_i ins straucheln gekommen, deshalb hier jetzt noch mal der richtige Beweis dazu:

Seien $a_1, \dots, a_n \in A = R[X_1, \dots, X_n]$ und $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ in $\Omega_{A/R}$.
Zu zeigen ist, dass dann schon alle a_i gleich 0 sind.

Wir betrachen die Derivationen $\frac{\partial}{\partial X_j}\colon R[X_1, \dots, X_n] \to R[X_1, \dots, X_n]$. Nach a) existiert jeweils ein eindeutiges $R[X_1, \dots, X_n]$-lineares $\varphi_j\colon \Omega_{A/R} \to R[X_1, \dots, X_n]$ mit $\frac{\partial}{\partial X_j} = \varphi_j \circ d$.

Aus $\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i = 0$ folgt $0 = \varphi_j(\sum_{i=1}^n a_i\, dX_i) \overset{\varphi_j\, A\text{-linear}}{=} \sum_{i=1}^n a_i\, \varphi_j(d(X_i)) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial X_j}(X_i) = a_j$.