Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

27.01.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 12

Auf diesem Blatt bezeichne k (fast) immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

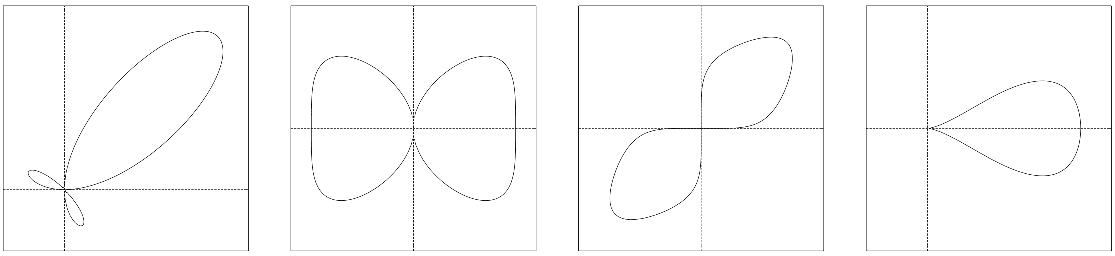
Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Es sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Bestimme die singulären Punkte der folgenden affinen Varietäten in $\mathbb{A}^2(k)$ bzw. in $\mathbb{A}^3(k)$:

$$V(X^4 + Y^4 - X^2) \qquad V(X^6 + Y^6 - XY)$$
$$V(X^4 + Y^4 + Y^2 - X^3) \qquad V(X^4 + Y^4 - X^2Y - XY^2)$$
$$V(XY^2 - Z^2)$$

Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung der Verschwindungsideale.

b) Nun sei $k = \mathbb{R}$. Welche der obigen Kurven in $\mathbb{A}^2(k)$ gehört zu welchem Bild?



Lösung:

a) Die Singularitäten von $V(XY^2 - Z^2)$ habe ich in der Übung berechnet. Bei allen anderen Varietäten ist $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X_1} f, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n} f) = \{(0,0)\}$ und damit, nach Aufgabe 1, $(0,0)$ die einzige Singularität von $V(f)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Charakteristik von k sei weder 2 noch 3. Für $\lambda \in k$ betrachten wir die Kurve $E_\lambda = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda))$.

a) Für welche λ ist E_λ singulär?
Hinweis: Benutze Aufgabe 1 zur Bestimmung von $I(E_\lambda)$.

b) Bestimme den projektiven Abschluss $\overline{E_\lambda}$ von E_λ und untersuche, ob er singuläre Punkte enthält.

c) Was passiert für $\mathrm{char}(k) = 2$ oder 3?

Lösung: Sei $f := Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) = Y^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2 - \lambda X$.

a) Sei $p = (x, y) \in E_\lambda$. Es gilt $J_f(p) = (-3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda, 2y)$ und damit $J_f(p) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge -3x^2 + 2(\lambda+1)x - \lambda = 0$. Aus $y = 0$ und $p \in E_\lambda$ folgt $x(x-1)(x-\lambda) = 0$, also $x \in \{0, 1, \lambda\}$. Setzen wir das in die zweite Bedingung für $J_f(p) = (0,0)$ ein, so erhalten wir:

- für $x = 0$: $-\lambda = 0$, also $\lambda = 0$
- für $x = 1$: $-3 + 2(\lambda+1) - \lambda = 0$, also $\lambda = 1$
- für $x = \lambda$: $-3\lambda^2 + 2(\lambda+1)\lambda - \lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1\}$

Die Menge $S_f := V(f, \frac{\partial}{\partial X}f, \frac{\partial}{\partial Y}f)$ ist folglich für alle $\lambda \in k$ endlich. Mit Aufgabe 1 folgt, dass $I(E_\lambda) = (f)$. Somit ist E_λ für $\lambda \notin \{0,1\}$ nichtsingulär. Für $\lambda = 0$ hat E_λ die Singularität $(0,0)$, für $\lambda = 1$ die Singularität $(1,0)$.

b) In der Übung habt ihr mir hoffentlich schon geglaubt, dass $\overline{E_\lambda} = V(H_Z(f)) = V(ZY^2 - X^3 + (\lambda+1)X^2Z - \lambda XZ^2)$. Weiter ist $\overline{E_\lambda} = (\overline{E_\lambda} \cap D(Z)) \cup (\overline{E_\lambda} \cap V(Z)) = E_\lambda \cup V(X, Z) = E_\lambda \cup \{(0:1:0)\}$. Alle Punkte aus E_λ haben wir schon untersucht („singulär" ist eine lokale Eigenschaft). Für $p = (0:1:0)$ und $F := H_Z(f)$ gilt

$$\begin{aligned}
(\frac{\partial}{\partial X}F)(p) &= (-3X^2 + 2(\lambda+1)XZ - \lambda Z^2)(p) = 0 \\
(\frac{\partial}{\partial Y}F)(p) &= (2YZ)(p) = 0 \\
(\frac{\partial}{\partial Z}F)(p) &= (Y^2 + (\lambda+1)X^2 - 2\lambda XZ)(p) = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Somit ist p für alle $\lambda \in k$ nichtsingulär und $\overline{E_\lambda}$ hat genau die Singularitäten von E_λ.

c) Der Punkt $p = (0:1:0)$ im projektiven Abschluss von E_λ ist unabhängig von der Charakteristik nichtsingulär. Sei als $p = (x, y) \in E_\lambda$.

$\mathrm{char}(k) = 2:$ Hier ist $J_f(p) = (-3x^2 - \lambda, 0) = (0,0) \Leftrightarrow x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$. Aus $p \in E_\lambda$ folgt $y^2 = h(x)$ mit $h(x) = x(x-1)(x-\lambda)$. Für $\lambda \neq 0$ ist der Punkt $x = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ keine Nullstelle von h, also hat E_λ die 4 Singularitäten

$$(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}), \quad (-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, \pm\sqrt{h\left(-i\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right)}).$$

Für $\lambda = 0$ ist $(0,0)$ die einzige Singularität.

Insgesamt sieht man, dass für $\mathrm{char}(k) = 2$ alle Kurven E_λ singulär sind.

$\mathrm{char}(k) = 3:$ Es gilt $J_f(p) = (2(\lambda+1)x - \lambda, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 0 \wedge 2(\lambda+1)x = \lambda$. Für $\lambda = -1$ sind diese Bedingungen nicht zu erfüllen und E_λ ist nichtsingulär. Für $\lambda \neq -1$ erfüllt $p = (\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ die Bedingung $J_f(p) = (0,0)$. Einsetzen in $f(p) = 0$ liefert nach etwas Rechnen $\lambda \in \{-\frac{1}{2}, -2\}$. Für diese λ ist $(\frac{\lambda}{2(\lambda+1)}, 0)$ eine Singularität von E_λ, für alle anderen λ ist E_λ nichtsingulär.