Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

10.02.2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 14

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Es sei $C \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve und $G \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so dass $C \not\subset V(G)$ gilt. Wir definieren den Schnittdivisor $\operatorname{div}(G)$ zu G folgendermaßen: Für einen Punkt $P \in C$ wählen wir ein homogenes Polynom $H \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $H(P) \neq 0$ und $\deg(H) = \deg(G)$ und setzen $n_P = \operatorname{ord}_P(G/H)$. Dann sei $\operatorname{div}(G) = \sum_{P \in C} n_P \cdot P$.

a) Zeige, dass $\operatorname{div}(G)$ wohldefiniert ist.

Lösung: Für $P \in C$, $P = (x_0 : \dots : x_n)$ gibt es ein i mit $x_i \neq 0$. Also erfüllt $X_i^{\deg(G)}$ die Bedingungen an H. Außerdem ist C echt in $\mathbb{P}^n(k)$ enthalten und irreduzibel, also hat $V(G) \cap C$ Dimension 0 (kleinere Dimension als C) und ist somit endlich. Damit ist nur für endlich viele $P \in C$ $\operatorname{ord}_P(G/H) \neq 0$ und die formale Summe in $\operatorname{div}(G)$ endlich.

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von H abhängt. Sei dazu $H' \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein weiteres homogenes Polynom mit $\deg(H') = \deg(G)$ und $H'(P) \neq 0$. Dann ist $\operatorname{ord}_P(G/H) = \operatorname{ord}_P(G/H \cdot H'/H') = \operatorname{ord}_P(G/H') + \operatorname{ord}_P(H'/H)$. Wegen $H'(P) \neq 0$ ist $\operatorname{ord}_P(H'/H) = 0$.

b) Sei nun $G_1, G_2 \in k[X_0, \dots, X_n]$ mit $\deg(G_1) = \deg(G_2)$. Zeige, dass die zwei Schnittdivisoren $\operatorname{div}(G_1)$ und $\operatorname{div}(G_2)$ linear äquivalent sind.

Lösung: Wir zeigen $\operatorname{div}(G_1) - \operatorname{div}(G_2) = \operatorname{div}(G_1/G_2)$.

Sei $P \in C$, $H \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogen mit $\deg(H) = \deg(G_i)$ und $H(P) \neq 0$. Es gilt $\operatorname{ord}_P(G_1/G_2) = \operatorname{ord}_P(G_1/H \cdot H/G_2) = \operatorname{ord}_P(G_1/H) - \operatorname{ord}_P(G_2/H)$.

c) Es sei $\operatorname{char}(k) \neq 2$. Bestimme für $C = V(Y^2Z - X(X-Z)(X+Z)) \subset \mathbb{P}^2(k)$ die Schnittdivisoren von X, Y und Z. Welche geometrische Bedeutung haben diese Divisoren?

Lösung: Zunächst berechnen wir die Uniformisierende im Punkt $P = (a : b : c) \in C$, also einen Erzeuger des maximalen Ideals m_P von $\mathcal{O}_{C,P}$.

1. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b \neq 0$.
Das Ideal m_P wird von $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$ und $\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}$ erzeugt. Uniformisierende ist $\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}$, da

$$\begin{aligned}
\left(\frac{Y}{Z} - \frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c}\right) &= \frac{Y^2}{Z^2} - \frac{b^2}{c^2} = \frac{Y^2Z}{Z^3} - \frac{b^2c}{c^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} - \frac{a(a-c)(a+c)}{c^3} \\
&= \left(\frac{X}{Z} - \frac{a}{c}\right)\left(\frac{X^2}{Z^2} + \frac{a}{c}\frac{X}{Z} + \frac{a^2}{c^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

und $\frac{Y}{Z} + \frac{b}{c} \in \mathcal{O}_{C,P}^\times$ für $b \neq 0$.

2. Fall: $P \in C \cap D(Z)$, $b = 0$. Hier ist $P \in \{(0:0:1), (1:0:1), (-1:0:1)\}$. Es gilt

$$\frac{Y^2}{Z^2} = \frac{Y^2 Z}{Z^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Z^3} = \frac{X}{Z}(\frac{X}{Z} - 1)(\frac{X}{Z} + 1)\,.$$

Für $P = (0:0:1)$ sind $\frac{X}{Z} - 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^{\times}$ und $\frac{X}{Z} + 1 \in \mathcal{O}_{C,P}^{\times}$, also ist $\frac{X}{Z} = \frac{1}{(\frac{X}{Z}-1)(\frac{X}{Z}+1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in (\frac{Y}{Z})$.
Analog sind für $P = (1:0:1)$ bzw. $P = (-1:0:1)$ die Erzeuger $\frac{X}{Z} - 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}+1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$ bzw. $\frac{X}{Z} + 1 = \frac{1}{\frac{X}{Z}(\frac{X}{Z}-1)} \frac{Y^2}{Z^2} \in \left(\frac{Y}{Z}\right)$.
Das maximale Ideal m_P wird folglich von $\frac{Y}{Z}$ erzeugt.

3. Fall: $P = (0:1:0)$
Es gilt $\frac{Z}{Y} = \frac{Y^2 Z}{Y^3} = \frac{X(X-Z)(X+Z)}{Y^3} = \frac{X^3}{Y^3} - \frac{XZ \cdot Z}{Y^2 \cdot Y}$ und somit $\frac{Z}{Y}(1 + \frac{XZ}{Y^2}) = (\frac{X}{Y})^3$. Da $1 + \frac{XZ}{Y^2} \in \mathcal{O}_{C,P}^{\times}$ folgt $\frac{Z}{Y} \in \left(\frac{X}{Y}\right)$ und damit $m_P = \left(\frac{X}{Y}\right)$.

Nun können wir die Schnittdivisoren berechnen:

Zunächst stellen wir fest, dass $\mathrm{ord}_{(a:b:c)}(\frac{X}{H}) = 0$ für $a \neq 0$. Aus $(0:b:c) \in C$ folgt $b = 0$ oder $c = 0$. Somit gilt

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{ord}_{(0:0:1)}(\frac{X}{Z}) \cdot (0:0:1) + \mathrm{ord}_{(0:1:0)}(\frac{X}{Y}) \cdot (0:1:0) = 2 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (0:1:0)\,.$$

Analog folgt

$$\mathrm{div}(Y) = 1 \cdot (0:0:1) + 1 \cdot (1:0:1) + 1 \cdot (-1:0:1) \quad \text{und} \quad \mathrm{div}(Z) = 3 \cdot (0:1:0)\,.$$

Die geometrische Bedeutung des Schnittdivisors ist genau das, was der Name suggeriert. Schneidet man C mit $V(G)$ und zählt die Schnittpunkte mit Vielfachheit, so bekommt man den Schnittdivisor $\mathrm{div}(G)$. Die Abbildungen 1 und 2 zeigen zwei reelle Bilder zur geometrischen Bedeutung.

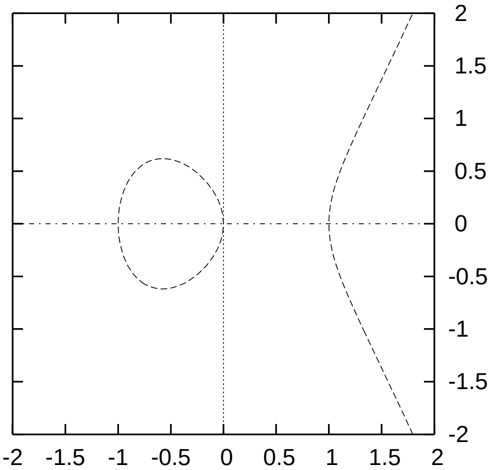

Abbildung 1: $C \cap D(Z)$ mit $V(X)$ (y-Achse) und $V(Y)$ (x-Achse).

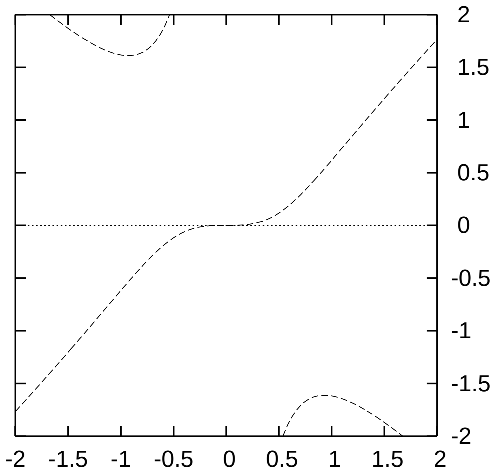

Abbildung 2: $C \cap D(Y)$ mit $V(Z)$ (x-Achse).

d) Der Grad d von C sei der Grad des Schnittdivisors eines homogenen Polynoms von Grad 1. Zeige: Ist $n = 2$ und $C = V(F)$ für ein homogenes Polynom $F \in k[X_0, X_1, X_2]$, so gilt $\deg(F) = d$.

Hinweis: Man kann ohne Einschränkung voraussetzen, dass $(0 : 0 : 1) \notin V(F)$. *(Wieso?) Dann hilft es, den Morphismus* $C \to \mathbb{P}^1(k)$, $(x : y : z) \mapsto (x : y)$ *zu betrachten.*

Lösung: Es gibt ein $P = (a : b : c) \in \mathbb{P}^2 \setminus V(F)$ und eine lineare Abbildung $\Phi \in \mathrm{GL}_3(k)$ mit $\Phi(a, b, c) = (0, 0, 1)$. Dieses Φ induziert einen Isomorphismus $\tilde{\Phi}\colon V(F) \to V(\tilde{F})$, $(x : y : z) \mapsto \Phi(x : y : z)$, wobei $\tilde{F} = F \circ \Phi^{-1}$ (etwas sehr ähnliches haben wir auf Übungsblatt 13 in Aufgabe 2 schon einmal gemacht). Wegen $\tilde{F}((0 : 0 : 1)) = (F \circ \Phi^{-1})((0 : 0 : 1)) = F((a : b : c)) \neq 0$ ist $(0 : 0 : 1)$ nicht in $V(\tilde{F})$ enthalten. Folglich gilt ohne Einschränkung, dass $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Wir betrachten den Morphismus $h : C \to \mathbb{P}^1(k), (x : y : z) \mapsto (x : y)$. Dieser ist wohldefiniert, da $(0 : 0 : 1) \notin C$.

Behauptung 1: $\mathrm{div}(X) = h^*((0 : 1))$.

Beweis Beh. 1: Sei $P \in C$. Ist $P \in D(Y)$, so gilt $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = \mathrm{ord}_P(\frac{X}{Y}) = \mathrm{ord}_P(\frac{X_0}{X_1} \circ h) = e_P(h) = \mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1))$. Ist andernfalls $P = (a : 0 : c) \in V(Y)$, dann ist $h(P) \neq (0 : 1)$ und damit $\mathrm{ord}_P(h^*(0 : 1)) = 0$. Außerdem folgt aus $(0 : 0 : 1) \notin C$, dass $a \neq 0$ und damit $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(X)) = 0$.

Behauptung 2: $\deg h = \deg F$.

Aus Behauptung 1 und 2 folgt dann wie gewünscht

$$d = \deg(\mathrm{div}(X)) = \deg(h^*((0 : 1))) = \sum_{h(P)=(0:1)} e_P(h) = \deg h = \deg F\,.$$

Beweis Beh. 2: Nach Definition gilt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))]$. Betrachte die Einschränkung h^a von h auf $C^a = C \cap D(Y)$ nach $\mathbb{P}^1(k) \cap D(Y) = \mathbb{A}^1(k)$. Der Morphismus $h^a : C^a \to \mathbb{A}^1(k), (x : 1 : z) \mapsto x$ induziert einen Morphismus $(h^a)^\sharp : k(\mathbb{A}^1(k)) = k(X) \hookrightarrow k(C^a) = k(x, z), X \mapsto x$, wobei x und z die Restklassen von X und Z in $k[C^a]$ bezeichnen.

Das Bild von $(h^a)^\sharp$ ist $k(x)$ und für z gilt $F(x,1,z) = 0$. Sei m der Grad von F und $F = \sum_{i+j+k=m} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$. Wegen $(0:0:1) \notin C$ ist $a_{00m} \neq 0$ und die Dehomogenisierung von F nach Y, $f := F(X,1,Z)$, hat Grad m in Z. Da F irreduzibel in $k[X,Y,Z]$ ist, ist auch f irreduzibel in $k[X,Z]$. Eine einfache Folgerung aus dem Lemma von Gauß [1] sagt, dass dann f auch über $k(X)[Z]$ irreduzibel ist. Wegen $C^a = V(f)$, gilt $k(C^a) = \mathrm{Quot}(k[X,Z]/(f)) \cong k(X)[Z]/(f)$ und somit $\deg h^a = [k(C^a) : k(X)] = \deg f$.

Die Inklusion $C^a \hookrightarrow C$ hat eine dominante rationale Umkehrabbildung $\mathrm{id}\colon C \dashrightarrow C^a$. Daher ist $k(C^a) \cong k(C)$. Genauso ist auch $k(\mathbb{P}^1(k)) \cong k(\mathbb{A}^1(k))$ und es folgt $\deg h = [k(C) : k(\mathbb{P}^1(k))] = [k(C^a) : k(\mathbb{A}^1(k))] = \deg h^a$. Insgesamt gilt $\deg F = \deg f = \deg h^a = \deg h$.

e) Zeige eine Version des Satzes von Bézout für nichtsinguläre Kurven: Ist $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom von Grad e, so dass $C \not\subset V(G)$, und ist d wieder der Grad von C, so gilt

$$\deg(\mathrm{div}(G)) = d \cdot e.$$

Lösung: Sei $H \in K[X_0, \ldots, X_n]$ homogen, $\deg(H) = 1$, $C \not\subset V(H)$ (z.B. $H = X_i$). Dann ist $\deg(G) = \deg(H^e)$. Nach b) sind $\mathrm{div}(G)$ und $\mathrm{div}(H^e)$ linear äquivalent, es gilt also $\deg(\mathrm{div}(G)) = \deg(\mathrm{div}(H^e))$. Weiterhin gilt $\deg(\mathrm{div}(H^e)) = e \cdot \deg(\mathrm{div}(H))) = e \cdot d$, denn $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(H)) = n_P \Leftrightarrow \mathrm{ord}_P(H/\tilde{H}) = n_P$, wobei $\tilde{H} \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit $\deg(\tilde{H}) = 1$ und $\tilde{H}(P) \neq 0$ und damit $\mathrm{ord}_P(\mathrm{div}(H^e)) = \mathrm{ord}_P(H^e/\tilde{H}^e) = e \cdot \mathrm{ord}_P(H/\tilde{H}) = e \cdot n_P$.

[1] siehe Hilfssatz 2.2.6 in „Algebra im WS 2011/2012“ von Dr. Stefan Kühnlein