Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

28.10.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei k ein beliebiger Körper. Dann sind $\mathbb{A}^2(k)$ und $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ als Mengen gleich. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2(k)$ genau dann die Produkttopologie von $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$ ist, wenn k endlich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper und $V_k = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3(k)$.

a) Skizziere die affine Varietät $V_{\mathbb{R}}$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimme die irreduziblen Komponenten von V_k.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Wir versehen Y mit der Spurtopologie. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Y ist irreduzibel.

ii) Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist irreduzibel.[1]

iii) Zwei nichtleere, offene Mengen in Y haben nichtleeren Schnitt.

iv) Jede nichtleere, offene Menge $U \subset Y$ ist dicht in Y (d. h. $\overline{U} = Y$).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei k ein unendlicher Körper. Zeige, dass für jedes $n \geq 1$ der Raum $\mathbb{A}^n(k)$ mit der Zariski-Topologie irreduzibel ist.

Hinweis: Benutze Proposition 4.4 aus der Vorlesung oder zeige, dass $\mathbb{A}^n(k)$ die Bedingung (iii) aus Aufgabe 3 erfüllt.

Abgabe bis Freitag, den 4.11.2011, vor Beginn der Übung oder vorher in Zimmer 4A-04 des Allianzgebäudes 05.20.

---

[1] Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist definiert als der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die Y enthalten.