Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

4.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 2

Zunächst eine kleine Erinnerung:
Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge von X. Per Definition ist $\tilde{U} \subseteq Y$ genau dann offen in Y (bzgl. der Spurtopologie), wenn ein offenes $U \subseteq X$ existiert mit $U \cap Y = \tilde{U}$.
Die analoge Definition mit abgeschlossenen Mengen liefert die gleiche Topologie:

$$\begin{aligned} & A \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \\ \Leftrightarrow\ & Y \setminus A \subseteq Y \text{ offen} \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, U \subseteq X \text{ offen} : Y \cap U = Y \setminus A \\ \Leftrightarrow\ & \exists\, X \setminus U \subseteq X \text{ abgeschlossen} : Y \cap (X \setminus U) = A \end{aligned}$$

Eine Menge $A \subseteq Y$ ist also genau dann abgeschlossen in Y bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine abgeschlossene Menge $\tilde{A} \subseteq X$ gibt mit $\tilde{A} \cap Y = A$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Wir versehen Y mit der Spurtopologie. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Y ist irreduzibel.

ii) Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist irreduzibel.[1]

iii) Zwei nichtleere, offene Mengen in Y haben nichtleeren Schnitt.

iv) Jede nichtleere, offene Menge $U \subset Y$ ist dicht in Y (d. h. $\overline{U} = Y$).

Lösung:
In der Übung haben wir bereits gesehen, dass i) $\Leftrightarrow$ iii) und iii) $\Rightarrow$ iv). Auch i) $\Rightarrow$ ii) stand schon an der Tafel:
Angenommen $\overline{Y}$ ist reduzibel, d. h. $\overline{Y} = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in $\overline{Y}$. Dann gibt es (siehe oben) abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap \overline{Y} = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap \overline{Y} = A_2$. Dann sind $\tilde{A}_i \cap Y$ abgeschlossen in Y. Außerdem gilt $\tilde{A}_i \cap Y \neq Y$, da sonst $Y = \tilde{A}_i \cap Y \subseteq A_i \subsetneq \overline{Y}$, was im Widerspruch dazu steht, dass $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Menge in X ist, die Y enthält. Es folgt $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y)$ und damit ist Y reduzibel.

[1] Der Abschluss $\overline{Y}$ von Y ist definiert als der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen, die Y enthalten.

iv) ⇒ iii): Seien $U_1, U_2 \subseteq Y$ offen und nichtleer. Wäre $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so wäre $U_2 \subseteq Y \setminus U_1$. Die Menge $Y \setminus U_1$ ist abgeschlossen, also gilt auch $\overline{U_2} \subseteq Y \setminus U_1$. Aber $\overline{U_2} = Y$, also ist $U_1 = \emptyset$, ein Widerspruch!

ii) ⇒ i): Angenommen Y ist reduzibel, d. h. $Y = A_1 \cup A_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 in Y. Dann gibt es abgeschlossene Mengen $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ in X mit $\tilde{A}_1 \cap Y = A_1$ und $\tilde{A}_2 \cap Y = A_2$. Die Mengen $\tilde{A}_i \cap \overline{Y}$ sind abgeschlossen in X. Außerdem gilt: $Y = (\tilde{A}_1 \cap Y) \cup (\tilde{A}_2 \cap Y) \subseteq (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y}) \subseteq \overline{Y}$ und damit $\overline{Y} = (\tilde{A}_1 \cap \overline{Y}) \cup (\tilde{A}_2 \cap \overline{Y})$. Wäre $\tilde{A}_i \cap \overline{Y} = \overline{Y}$, so auch $Y = \overline{Y} \cap Y = (\tilde{A}_i \cap \overline{Y}) \cap Y = \tilde{A}_i \cap Y = A_i$, ein Widerspruch. Damit ist $\overline{Y}$ reduzibel.