

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei k ein Körper, A und B zwei k -Algebren, B endlich erzeugt und $\varphi: A \rightarrow B$ ein k -Algebrenhomomorphismus.

Zeige, dass das Urbild eines maximalen Ideals in B unter φ ein maximales Ideal in A ist.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für B die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe \mathcal{F} von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X : $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''} = \rho_U^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
 - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
 - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i \cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i \cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_* \mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von \mathcal{F} .)

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen.

Zeige: Der k -Algebrenhomomorphismus $\rho: k[V] \rightarrow \mathcal{O}_V(U), f \mapsto f|_U$ ist genau dann injektiv, wenn U dicht in V liegt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $U = \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0, 0)\}$. Bestimme den Ring der regulären Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2(k)}(U)$. Folgere, dass U nicht isomorph zu einer affinen Varietät ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Es seien V eine affine Varietät, $U \subseteq V$ offen und $g \in \mathcal{O}_V(U)$.

Zeige, dass $W := \{x \in U : g(x) = 0\}$ abgeschlossen in U ist.

Abgabe bis Freitag, den 18.11.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.