

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 4

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe \mathcal{F} von Ringen auf X besteht aus einem Ring $\mathcal{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ und einem Ringhomomorphismus $\rho_U^V: \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ für alle offenen $U \subseteq V \subseteq X$, so dass:

- $\forall U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in X : $\rho_U^{U'} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ und $\rho_U^{U''} = \rho_U^{U'} \circ \rho_{U'}^{U''}$
- Für jede offene Überdeckung $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ einer offenen Menge $V \subseteq X$ gilt:
 - Gilt für ein $f \in \mathcal{F}(V)$ und alle $i \in I$, dass $\rho_{V_i}^V(f) = 0$, so ist $f = 0$.
 - Zu jeder Menge $\{f_i \in \mathcal{F}(V_i) \mid i \in I\}$ mit der Eigenschaft $\rho_{V_i \cap V_j}^{V_i}(f_i) = \rho_{V_i \cap V_j}^{V_j}(f_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(V)$ mit $\rho_{V_i}^V(f) = f_i$ für alle $i \in I$.

Die ρ_U^V werden oft *Restriktionsabbildungen* genannt.

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Für eine offene Menge $V \subseteq Y$ definieren wir $f_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$.

Zeige, dass dadurch (zusammen mit geeigneten Restriktionsabbildungen) eine Garbe von Ringen auf Y gegeben ist. ($f_* \mathcal{F}$ heißt *direktes Bild* von \mathcal{F} .)

Lösung:

Für offene Mengen $U \subseteq V \subseteq Y$ sind $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(Y) = X$ offen in X . Wir können also Restriktionsabbildungen definieren als $\sigma_U^V = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}: \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Es gilt:

- $\sigma_U^U = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)} = \text{id}_{\mathcal{F}(f^{-1}(U))} = \text{id}_{f_* \mathcal{F}(U)}$
- Seien $U \subseteq U' \subseteq U''$ offen in Y , dann ist $\sigma_U^{U''} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U'')} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U')} \circ \rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U'')} = \rho_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U')} \circ \rho_{f^{-1}(U')}^{f^{-1}(U'')} = \sigma_U^{U''}$.
- Sei $V = \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $V \subseteq Y$.
 - Für $h \in f_* \mathcal{F}(V)$ mit $\sigma_{V_i}^V(h) = 0$ für alle $i \in I$ gilt dann auch $\rho_{f^{-1}(V_i)}^{f^{-1}(V)}(h) = 0$ für alle $i \in I$. Außerdem ist $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i)$ eine offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$. Da \mathcal{F} eine Garbe ist, ist somit $h = 0$.

- Sind $h_i \in f_* \mathcal{F}(V_i)$ gegeben mit $\sigma_{V_i \cap V_j}^{V_i}(h_i) = \sigma_{V_i \cap V_j}^{V_j}(h_j)$ für alle Paare von i und j aus I , dann gilt auch $\rho_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}^{f^{-1}(V_i)}(h_i) = \rho_{f^{-1}(V_i \cap V_j)}^{f^{-1}(V_j)}(h_j)$. Wegen $f^{-1}(V_i \cap V_j) = f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j)$ und der Garbeneigenschaften von \mathcal{F} existiert dann ein $h \in \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_* \mathcal{F}(V)$ mit $\sigma_{V_i}^V(h) = \rho_{f^{-1}(V_i)}^{f^{-1}(V)}(h) = h_i$ für alle $i \in I$.